Math. P.
369 e

Math. I.
369e

Vollständige Auflösung der Aufgabe:

in

einen Kreis ein Dreieck

mit

einem gegebenen Winkel und Inhalt

zu beschreiben.

Zur Prüfung der von D. Wex versuchten
Erklärung der mathematischen Stelle
in Plato's Meno dargestellt

R

von

Johann Wolfgang Müller,

Professor der Mathematik.

Mit einer Steindrucktafel.

Nürnberg,

bei Riegel und Wießner.

1826.

Wd.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorbericht.

Die mathematische Stelle in Plato's Meno ist von vielen Gelehrten, so wie auch von mir in der Schrift: Commentar über zwei dunkle mathematische Stellen in Platon's Schriften, Nürnberg, 1797, untersucht worden, und mehrere haben Aenderungen mit derselben vorgenommen, unter der nicht ungegründeteu Voraussetzung, daß der ursprüngliche Text durch Nachläsigkeit mancher Abschreiber verdorben worden sey. H. D. Wex ist nicht dieser Meinuug, und hat ohne Aenderung der gewöhnlichen Leseart eine neue Erkläruug versucht in der Gradualschrift: Commentatio de loco math. in Platonis Menone, Halis Sax. 1825. Da ich bei genauer Prüfung die vom Verf. aufgestellten math. Sätze zum Theil nicht ganz richtig fand, so habe ich eine evidente Theorie eines bisher noch nicht hinlänglich untersuchten Gegenstandes ausgeführt, die ich hier mittheile. Zugleich bearbeitete ich einen gewissermassen ähnlichen Gegenstand, den ich als Anhang

beifüge, nebst der Auflösung der algebraischen Aufgabe: Wenn eine gewisse ganze Zahl d gegeben ist, zwei ganze Zahlen a und b zu finden, so daß $\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}d^2 = a^2$, oder $2a^2 - b^2 = d^2$ ist. Diese Auflösung ist deswegen wichtig, weil ohne sie die Aufgabe: drei ganze Zahlen x, y und z zu finden, so daß $x - y = f$, und überdieß $x^2 + y^2 = z^2$ sey, nicht vollständig aufgelöset, also die Theorie der pythagoräischen Zahlendreiecke nicht hinlänglich ausgeführt werden kann. Dabei ist bemerkungswerth, daß wenn $x^2 + d^2 = z^2$ seyn soll, d zwar jede ganze Zahl seyn kann, aber die Anzahl der für das gegebene d zu findenden x und z endlich ist, hingegen wenn $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}d^2 = z^2$ oder $x^2 + d^2 = 2z^2$ seyn soll, zwar d bedingt ist, aber für einerlei d eine unendliche Menge der zu findenden x und z statt findet.

Erster Satz.

Lehrsatz. Fig. 1.

Die Fläche eines in einem Kreis, dessen Halbmesser $CE = r$ ist, beschriebenen gleichseitigen Dreiecks ABD ist $= \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$, und dessen Höhe $DF = \frac{3}{2} r$.

Beweis.

Man ziehe CA und AE, so ist AE die Seite eines im Kreis beschriebenen regulären Sechsecks, also $= r$, folglich das Dreieck AEC gleichseitig, daher W. $AEC =$ W. ACE, und da auch bei F rechte Winkel sind, so ist $EF = CF$, also $EF = \frac{1}{2} r$, und da $DE = 2r$ ist, so ist $DF = 2r - \frac{1}{2} r = \frac{3}{2} r$.

Nun verhält sich $DF : AF = AF : EF$, oder $\frac{3}{2} r : AF = AF : \frac{1}{2} r$, also ist $AF = \sqrt{\frac{3}{4} r^2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Aber $AF.\ DF$ ist die Fläche T des gleichseitigen Dreiecks ABD, also ist $\frac{r\sqrt{3}}{2} . \frac{3}{2} r = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3} = T$.

Zweiter Satz.

Aufgabe. Fig. 2 und 3.

Die Bedingung anzugeben, unter welcher in einen gegebenen Kreis $GVOFL$ ein Dreieck beschrieben werden

kann, dessen Fläche der Fläche F eines gegebenen Dreiecks ABC gleich ist.

Auflösung.

Man nehme in dem gegebenen Dreieck ABC eine Seite (z. B. AB) als Grundlinie an, ziehe auf sie eine senkrechte Linie CE aus der Spitze des Dreiecks, und halbire AB in D, so ist AD die halbe Grundlinie und CE die Höhe des Dreiecks. Ferner ziehe man einen Durchmesser FG, halbire den Halbmesser KG in H, und errichte aus dem Punkt H auf KG die senkrechte HI von unbestimmter Länge, die man rückwärts bis V verlängert, so ist LV die Seite eines in diesen Kreis zu beschreibenden gleichseitigen Dreiecks, und FH dessen Höhe. Hierauf mache man HP = der Höhe CE des gegebenen Dreiecks, und ziehe LP, so wie aus dem Endpunkt F des Durchmessers die FM parallel mit LP. Endlich vergleiche man die halbe Grundlinie AD des gegebenen Dreiecks ABC mit der Linie HM. Ist nämlich AD = HM, oder kleiner als HM, so ist die Auflösung möglich, ist aber AD größer als HM, so kann in den gegebenen Kreis kein Dreieck beschrieben werden, das dem gegebenen Dreieck ABC gleich ist.

Beweis.

Es ist F = AD. CE und T = HL. FH. Es darf aber F nicht größer seyn als die Fläche T des in diesem Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks, d. i. wenn der Halbmesser dieses Kreises = r ist, so darf die Fläche F des gegebenen Dreiecks nicht größer seyn als $\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$, weil das gleichseitige Dreieck das größte aller der Dreiecke ist, die in diesen Kreis beschrieben werden können. Wenn nun AD = HM ist, so ist, (da HP = CE gemacht worden,)

$F = HM.HP$, es verhält sich aber auch, (da FM mit LP parallel gezogen worden,) $HP:HL = FH:HM$, daher ist $HP.HM = HL.FH$, d. i. $F = T$, oder die Fläche des gegebenen Dreiecks ist der Fläche des im gegebenen Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks gleich. Ist ferner AD kleiner als HM, oder $AD = HM - Z$, so ist $F = (HM - Z).HP$, also kleiner als $HM.HP$, und da nach dem Erwiesenen $HM.HP = HL.FH$ ist, so ist F auch kleiner als $HL.FH$, das ist: F ist kleiner als T, oder die Fläche des gegebenen Dreiecks kleiner, als die Fläche des im gegebenen Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks. Ist aber AD größer als HM, oder $AD = HM + Z$, so ist $F = (HM + Z)HP$, oder größer als $HL.HF$, d.i. größer als T. Folglich kann in diesem Fall in den gegebenen Kreis kein Dreieck beschrieben werden, welches dem gegebenen Dreieck gleich ist.

Dritter Satz.

Aufgabe. Fig. 2 und 3.

Unter der Voraussetzung der eben festgesetzten Bedingung, daß die halbe Grundlinie AD des gegebenen Dreiecks ABC nicht größer als HM, d. i. nicht größer als die vierte Proportionallinie zur Höhe CE des gegebenen Dreiecks, zur Höhe FH des im gegebenen Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks und zu dessen halber Grundlinie HL sey, in den gegebenen Kreis ein Dreieck LOV zu beschreiben, das nicht nur mit dem gegebenen Dreieck ABC gleichen Flächeninhalt, sondern auch eine Seite LV des im gegebenen Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks zur Grundlinie hat.

Auflösung.

Man mache HP=CE, und HR=AD, ziehe LP und mit ihr RS parallel, mit LV aber ziehe man SO parallel, endlich verbinde man die Punkte L, O und V durch die beiden geraden Linien OL und OV, so ist das Dreieck LOV das verlangte Dreieck

Beweis.

Da RS mit LP parallel gezogen ist, so verhält sich HL : HP=HR:HS. oder, (da nach der Construction HP=CE und HR=AD ist,) HL:CE=AD:HS, folglich ist HL. HS=CE. AD. Aber CE. AD ist die Fläche F des gegebenen Dreiecks ABC, also ist auch HL. HS=F, d. h. das gleichschenkliche Dreieck, dessen Grundlnie 2HL und die Höhe HS ist, ist dem gegebenen Dreieck gleich. Nun hat aber das Dreieck LOV diese Grundlinie 2HL, und dessen Höhe ist=HS, da SO mit LV parallel gezogen ist, also ist das Dreieck LOV, dessen Grundlinie eine Seite des im gegebenen Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist, dem gegebenen Dreieck ABC gleich.

Anmerkung.

Ist AD=HM, so ist aus dem Vorhergehenden klar, daß auf der Seite LV in diesem Fall nur ein gleichseitiges Dreieck beschrieben werden kann, welches dem gegebenen Dreieck gleich ist.

Vierter Satz.

Aufgabe. *Fig.* 4, 5 und 6.

In einen gegebenen Kreis GMHFLN, dessen Halbmesser KG=r ist, zwei gleichschenkliche Dreiecke

FHL und FMN zu beschreiben, von denen jedes einem gegebenen Dreieck ABC gleich ist, vorausgesetzt, daß das Dreieck ABC oder F kleiner als $\frac{3}{4}r^2 \sqrt{3}$ sey.

Auflösung und Beweis.

Es seyen im Dreieck FHL die Seiten FH und FL gleich, und auch dessen Flächeninhalt dem des gegebenen Dreiecks ABC, d. i. $= \frac{1}{2}AB.CE$ oder $= F$. Ferner sey $FI = u$, und $HI = y$, so ist $uy = F$ und für die senkrechten Coordinaten u und y im Kreise: $y = \sqrt{(2ru - u^2)}$ in welcher Formel 2r den Durchmesser des Kreises bezeichnet. Da nun $uy = F$ ist, so ist $u\sqrt{(2ru - u^2)} = F$ und daher $u^2(2ru - u^2) = F^2$, oder $u^4 - 2ru^3 = -F^2$ und daher $u^4 - 2ru^3 + F^2 = 0$. Diese biquadratische Gleichung kann man nun geometrisch, oder wenn r und F in Zahlen angegeben sind, durch arithmetische Behandlung auflösen.

Ist das letztere der Fall, z. B. $r = 5''$, $AB = 8''$, und $CE = 7''$ also $F = 28''$ Q., so ist zuerst die Dreiecksfläche $28''$ Q. zu vergleichen mit dem Inhalt des in dem Kreis, dessen Halbmesser $= r$ ist, beschriebenen gleichseitigen Dreiecks. Dieser ist $\frac{3}{4}r^2\sqrt{3} = 1,299038r^2$, oder beinahe $= 1,3r^2$. Nun ist $r = 5$, also $r^2 = 25$ und $1,3r^2 = 32,5$ beinahe. Da 28 kleiner als 32,5 ist, so kann die Aufgabe aufgelöset werden. Es ist also hier: $u^4 - 10u^3 + 784 = 0$. Zu ihrer Auflösung kann man die Näherungsformel: $v - \frac{v^4 - 2rv^3 + F^2}{4v^3 - 6rv^2}$ gebrauchen. Diese Näherungsformel läßt sich für alle Arten algebraischer Gleichungen von jedem Grad, sogleich darstellen. Man schreibt nemlich in der gegebenen Gleichung, wenn sie auf Null gebracht worden, v statt u, und setzt diese Gleichung als Zäh-

ler eines Bruches an, dessen Nenner man findet, wenn man diesen Zähler (hier $v^4 - 2rv^3 + F^2$) differentiirt, und das gefundene Differentiale mit dv dividirt. Endlich wird noch v selbst als Minuend angesetzt, und der gefundene Bruch als Subtrahend betrachtet. Diese Näherungsformel $v - \frac{v^4 - 2rv^3 + F^2}{4v^3 - 6rv^2}$, läßt sich nun auch so darstellen: $\frac{3v^4 - 4rv^3 - F^2}{4v^3 - 6rv^2}$, und für die Zahlenberechnung noch bequemer so ausdrücken:

$$3/4 \left\{ v + \frac{3v^3 - 2F^2}{6vr^3 - 9rv^2} \right\} \text{ beinahe} = u.$$

Im gegenwärtigen Fall, da $r = 5$ und $F = 28$ ist, wird diese Näherungsformel seyn

$$3/4 \left\{ v + \frac{5v^3 - 1568}{6v^3 - 45v^2} \right\} = \text{beinahe } u.$$

Das erste v wird nun kleiner angenommen als $\frac{3}{2}r$, das heißt: als die Höhe des im Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks. Also hier v angenommen kleiner als $7\frac{1}{2}$, d. h. $= 7$, und diese Zahl 7 statt v in der Näherungsformel gesetzt, giebt nach gehöriger Berechnung

$$3/4 \left\{ 7 + \frac{147}{-147} \right\} = \tfrac{3}{4}.\ 6 = 4{,}5.$$ Diesen gefundenen Werth von u wiederum statt v in die Formel gesetzt, giebt

$$3/4 \left\{ 4{,}5 + 3{,}3 \right\} = 5{,}8.$$ Durch wiederholte Substitution erhält man

$$3/4 \left\{ 5{,}8 + 1{,}72 \right\} = 5{,}64.$$ Hieraus sucht man eben so den noch nähern Werth von $u =$

$\sqrt[3]{4}\left\{5,64 + 1,890079\right\} = 5,6475$. Endlich daraus 5,6475654$_1$ welche Zahl, da sie dem wahren Werth von u sehr nahe ist, als der erste Werth von u selbst betrachtet wird. Den zweiten Werth von u findet man auf ähnliche Art, indem man das erste v größer als $\frac{3}{4}$r aber doch kleiner als 2r annimmt, also im gegenwärtigen Fall größer als $7\frac{1}{2}$ und kleiner als 10. Man setze daher das erste v = 9, setze diesen Werth statt v in die vorige Näherungsformel, so findet man:

$$\sqrt[3]{4}\left\{9 + \frac{3645 - 1568}{4374 - 3645}\right\} =$$

$\sqrt[3]{4}\left\{9 + \frac{2077}{729}\right\} = \sqrt[3]{4}\left\{11,8491\right\} = 8,88$ einen dem u näheren Werth als 9. Wenn man so fortfährt, so findet man endlich den zweiten Werth von u = 8,8805853$_2$. Der dritte und vierte Werth von u, oder die dritte und vierte Wurzel der Gleichung $u^4 - 10u^3 + 784 = 0$ sind imaginär. Denn der eine von ihnen ist $= -2,26407 + \sqrt{-10,524}$. und der andere ist $= -2,26407 - \sqrt{10,524}$.

Hierauf mache man FI (Fig.4) = u = 5'',64 und FP = u = 8'',88. Ferner errichte man aus dem Punkt I die auf dem Durchmesser FG senkrechte IH und verlängere sie rückwärts bis L, eben so aus dem Punkt P die auf FG senkrechte PM und verlängere sie rückwärts bis N, endlich ziehe man FH, FL, FM und FN, so sind die zwei gleichschenklichen Dreiecke HFL und MFN die zwei verlangten Dreiecke.

Diese biquadratische Gleichung $u^4 - 2ru^3 + F^2 = 0$ kann aber auch geometrisch auf folgende Art construirt werden. Man ziehe (Fig. 6) eine gerade Linie BQ, mache

BA $=$ r und beschreibe eine Parabel MNADK, deren Parameter $=$ BA $=$ r und deren Axe AQ ist. Hierauf errichte man aus dem Scheitel A der Parabel die auf der Axe AQ senkrechte AC und mache sie $= \frac{1}{2}$r, ziehe ferner CP mit der Axe AQ parallel, ziehe aus dem Durchschnittspunkt D die auf AQ senkrechte Ordinate DL, mache DF $=$ r, und die aus F errichtete auf CP senkrechte FE auch $=$ r und ziehe die Hypotenuse DE, so ist $DE^2 = 2r^2$. Sodann halbire man die Grundlinie AB des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 5.) in D, ziehe die auf AB senkrechte CE als die Höhe des Dreiecks, mache EO $= \frac{1}{2}$AB $=$ DB, und ET $=$ r, ziehe OT und mit ihr parallel CV, so verhält sich ET : EO $=$ CE : EV, oder r : $\frac{1}{2}$AB $=$ CE : EV, da aber $\frac{1}{2}$AB . CE $=$ F ist, so ist $\frac{F}{r} =$ EV. Nun beschreibe man auf DE (Fig. 6) mit einem Halbmesser $= \frac{1}{2}$DE einen Halbkreis DRE, trage in denselben die Sehne DR $=$ EV $= \frac{F}{r}$ und ziehe ER. Endlich beschreibe man aus dem Punkte E als Mittelpunkt mit dem Halbmesser ER einen Kreis RMVR, und von den zwei Punkten R und M, in denen er die Parabel schneidet, ziehe man die geraden Linien RS und MP senkrecht auf CP, so sind diese beiden Linien RS und MP die beiden gesuchten möglichen Wurzeln der Gleichung $u^4 - 2ru^3 + F^2 = 0$. Man mache also im gegebenen Kreis FHMNL (Fig. 4) auf dessen Durchmesser FG das Stück FI $=$ RS, und das Stück FP $=$ MP, errichte aus I und P die auf dem Durchmesser FG senkrechten IH und PM, und verlängere sie rückwärts bis L und N, ziehe sodann FH und FL, so wie auch FM und FN, so sind die beiden gleichschenklichen Dreiecke HLF

und M N F, die verlangten Dreiecke, deren jedes dem gegebenen Dreieck A B C gleich ist.

Daß die gegebene Gleichung richtig construirt worden ist, wird so bewiesen. In der Parabel, deren Parameter $= r$, und deren Axe A Q ist, ist $NL = LD = y = \sqrt{r\,AL}$, also $y^2 = rx$, und $HM = Z = \sqrt{r.\,AH} = \sqrt{rt}$, folglich $Z^2 = rt$. Ferner ist $AC = DL = FG = PH = \frac{1}{2}r$, und da $EF = r$ ist, so ist auch $EG = \frac{1}{2}r$, und daher wenn E I senkrecht auf H M steht, auch $HI = \frac{1}{2}r$. Endlich ist $LN = LD$, also L N gleichfalls $= \frac{1}{2}r$. Es sey nun $PM = u$, so ist $MI = MP - IP = u - r$, also $MI^2 = u^2 - 2ru + r^2$. Ferner ist $\frac{Z^2 - y^2}{r} = \frac{rt - rx}{r}$, also $(Z + y)(Z - y) = r(t - x)$. Es ist aber $Z + y = HM + LN = HM + \frac{1}{2}r = MP = u$, und $Z - y = HM - HI = MI$, daher ist $(Z + y)(z - y) = u(u - r)$. Ferner ist $t - x = AH - AL = LH = DP$, folglich ist $u(u - r) = r.\,DP$, und daher $\frac{u^2 - ru}{r} = DP$, also $FP = DP - DF = \frac{u^2 - ru}{r} - r = \frac{u^2 - ru - r^2}{r}$. Da aber $EI = FP$ ist, so ist $EI^2 + MI^2 = \frac{u^4 - 2r\,u^3 - r^2\,u^2 + 2r^3 u + r^4}{r^2} + u^2 - 2ru + r^2$, und da $EI^2 + MI^2 = EM^2 = ER^2$ ist, so ist $ER^2 = \frac{u^4 - 2r\,u^3 + 2r^4}{r^2}$. Es ist aber ER^2 auch $= DE^2 - DR^2$, und D R ist $= \frac{F}{r}$ gemacht worden, also ist ER^2 auch $= \frac{F^2}{r^2} = \frac{2r^4 - F^2}{r^2}$. Daher ist $u^4 - 2ru^3 + 2r^4 =$

$2r^4 - F^2$, folglich $u^4 - 2ru^3 + F^2 = 0$, welches die ursprüngliche Gleichung ist, die also richtig construirt worden.

Fünfter Satz.

Aufgabe. Fig. 4.

Unter der Voraussetzung der im zweiten Satz angegebenen Bedingung, in einen gegebenen Kreis FHGL so viele Dreiecke zu beschreiben als man will, von denen jedes an Flächeninhalt dem gegebenen Dreieck gleich ist.

Auflösung und Beweis.

Man beschreibe zuerst zwei gleichschenkliche Dreiecke HLF und MNF, von denen jedes dem gegebenen Dreieck ABC gleich ist, (4ter Satz,) und deren Grundlinien HL und MN parallel laufen, da bei I und P rechte Winkel sind. Nun theile man den Abstand IP dieser beiden Parallelen in so viele gleiche oder ungleiche Theile als man will, und ziehe durch die Theilungspunkte mit HL oder MN parallele Sehnen, so kann man auf jeder dieser Sehnen das verlangte Dreieck beschreiben, wenn man nach der Auflösung der Aufgabe des dritten Satzes verfährt, indem statt LV (Fig. 2) die als Grundlinie des gleichseitigen Dreiecks gleichfalls zwischen den Sehnen HL und MN (in Fig. 4) liegt, auch jede andere zwischen diesen Sehnen befindliche und mit ihnen parallele Linie als Grundlinie des zu beschreibenden Dreiecks angenommen werden kann.

Zusatz.

Jedes dieser unendlich vielen Dreiecke, deren Grundlinien zwischen HL und MN parallel liegen, ist begreif-

lich ungleichseitig, die beiden Dreiecke aber, welche die Grenzlinien H L und M N zu Grundlinien haben, sind gleichschenklich, und ihre Spitzen liegen in einerlei Endpunkt des Durchmessers. Ferner, je näher die Fläche F des gegebenen Dreiecks A B C der Fläche des im gegebenen Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks kommt, desto kleiner wird der Abstand I P, und er verschwindet ganz, wenn die Fläche F des Dreiecks A B C der Fläche $\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$ des im gegebenen Kreise beschriebenen gleichseitigen Dreiecks gleich ist. Alsdann kann auch nur ein einziges Dreieck in den gegebenen Kreis beschrieben werden, das dem gegebenen Dreieck gleich ist, nemlich ein gleichseitiges. Denn wenn $F = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$ ist, so ist $F^2 = \frac{27}{16}r^4$. Nun soll $u^4 - 2ru^3 + F^2 = 0$ seyn, also auch $u^4 - 2ru^3 + \frac{27}{16}r^4 = 0$. Man setze $u = \frac{3}{2}r$, so ist $u^3 = \frac{27}{8}r^3$, und $2ru^3 = \frac{108}{16}r^4$, und $u^4 = \frac{81}{16}r^4$. Daher ist $u^4 - 2ru^3 + F^2 = \frac{81}{16}r^4 - \frac{108}{16}r^4 + \frac{27}{16}r^4$. Aber $\frac{81}{16}r^4 + \frac{27}{16}r^4$ ist $= \frac{108}{16}r^4$, daher $(\frac{3}{2}r)^4 - 2r(\frac{3}{2}r)^3 + (\frac{3}{4}r^2\sqrt{3})^2 = 0$. Also ist $\frac{3}{2}r$ eine Wurzel der Gleichung $u^4 - 2ru^3 + \frac{27}{16}r^4 = 0$. Dividirt man sie mit $u - \frac{3}{2}r$, so erhält man: $u^3 - \frac{1}{2}ru^2 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{9}{8}r^3 = 0$. Setzt man nun $t = \frac{2u}{r}$ so ist $u = \frac{rt}{2}$, und man erhält die Gleichung: $t^3 - (t^2 + 3t + 9) = 0$. Hier sieht man sogleich, daß $t = 3$ ist, folglich ist $u = \frac{3r}{2} = \frac{3}{2}r$ wie vorhin. Dividirt man endlich $u^3 - \frac{1}{2}ru^2 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{9}{8}r^3$ mit $u - \frac{3}{2}r$, so erhält man die quadratische Gleichung: $u^2 + ru + \frac{3}{4}r^2 = 0$. Wenn diese aufgelöset wird, so erhält man $u = \frac{1}{2}r\left(1 \pm \sqrt{-2}\right)$ welche

beide Wurzeln imaginär sind. Wenn also $F = \frac{3}{4}r^2 \sqrt{3}$ ist, so findet für u nur der einzige Werth $\frac{3}{2}r$ statt, welcher der Höhe des im Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks gleich ist. Also kann in diesem Fall nur dieses einzige Dreieck der Aufgabe Genüge leisten. Ist hingegen $F = r^2$, so ist $u^4 - 2ru^3 + r^4 = 0$, oder $u^4 + r^4 = 2ru^3$, oder $u.u^3 + r.r^3 = ru^3 + ru^3$. Man sieht hier leicht, daß $u = r$, also das in den Kreis zu beschreibende gleichschenkliche Dreieck ein rechtwinkliches ist, welches den Durchmesser $2r$ zur Hypotenuse hat. Dividirt man hierauf $u^4 - 2ru^3 + r^4$ mit $u - r$, so erhält man die cubische Gleichung $u^3 - r^2u - ru^2 - r^3 = 0$. Setzt man hierauf $u = t + \frac{1}{3}r$, so erhält man die Gleichung $t^3 - \frac{4}{3}r^2t - \frac{38}{27}r^3 = 0$. Wenn man hierauf $w = \frac{3t}{r}$ setzt, so ist $w^3 - 12w - 38 = 0$, nud w findet man mittelst der cardanischen Formel $= 1{,}208 + 3{,}309 = 4{,}517$. Aber t ist $= \frac{rw}{3}$, also

$$u = t + \tfrac{1}{3}r = \frac{rw}{3} + \frac{r}{3} = \tfrac{1}{3}(w + 1)r = \frac{5{,}517\,r}{3} = 1{,}839r.$$

Der dritte und vierte Werth von u aber ist imaginär. Hier ist also der Abstand zwischen den beiden parallelen Grundlinien der beiden in den gegebenen Kreis beschriebenen gleichschenklichen und gleichen Dreiecke sehr beträchtlich, und beträgt über $\frac{4}{5}$ des Halbmessers.

Sechster Satz.

Aufgabe. Fig. 3 und 4.

Die Bedingungen anzugeben, unter welchen ein Dreieck, dessen Fläche der Fläche F des gegebenen Dreiecks

ABC gleich ist, und dessen einer Winkel einem angegebenen Winkel C des gegebenen Dreiecks ABC gleich ist, in einen gegebenen Kreis GMHFLN (Fig 4.) beschrieben werden kann.

Auflösung.

1) Das gegebene Dreieck ABC (Fig 3) muß die Beschaffenheit haben, die in der Aufgabe des zweiten Satzes angegeben ist, nemlich daß ½AB oder AD nicht größer als HM (Fig. 2) ist.

2) Der Winkel (z. B. ACB) des gegebenen Dreiecks ABC, (Fig. 3) den auch das in den gegebenen Kreis GMHFLN (Fig. 4) zu beschreibende dem Dreieck ABC gleiche Dreieck haben soll, darf erstens nicht größer seyn als der Winkel HFL des gleichschenklichen im gegebenen Kreis beschriebenen Dreiecks, das mit dem gegebenen Dreieck gleiche Fläche und zur Grundlinie eine Sehne HL hat, die größer ist als die Seite des in diesem Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks. Er darf aber zweitens auch nicht kleiner seyn als der Winkel MFN des zweiten gleichschenklichen, dem gegebenen Dreieck gleichen Dreiecks, dessen Grundlinie MN kleiner ist als die Seite des in diesem Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

Beweis.

Denn außerdem wird das im gegebenen Kreis beschriebene Dreieck zwar den verlangten Winkel haben, aber die Fläche desselben wird der Fläche des gegebenen Dreiecks nicht gleich seyn. (5 Satz.)

Zusatz.

Es kann der Fall seyn, daß der Winkel ACB des gegebenen Dreiecks nicht gebraucht werden kann, indessen einer der andern beiden Winkel, oder sogar jeder von ihnen, BAC und ABC gebraucht werden kann. Z. B. Das gegebene Dreieck sey ein gleichschenkliches rechtwinkliches Dreieck, dessen Inhalt größer als r^2 aber kleiner als $\frac{3}{4}r^2 \cdot \sqrt{3}$, also die Grundlinie oder Hypotenuse größer als $2r$ ist, (da, wenn sie $= 2r$ wäre, der Inhalt dieses Dreiecks nur $= r^2$ seyn würde,) so kann zwar ein Dreieck in den gegebenen Kreis, dessen Halbmesser $= r$ ist, beschrieben werden, dessen Fläche der Fläche dieses gegebenen Dreiecks gleich ist, aber es kann keinen rechten Winkel haben, denn in diesem Fall würde es im Halbkreis stehen, und folglich dessen Inhalt höchstens (wenn es gleichschenklich würde,) $= r^2$ seyn. Hingegen wird der spitzige Winkel $\frac{1}{2}R$ in einem gegebenen gleichschenklichen und rechtwinklichen Dreieck, dessen Hypotenuse zwar größer als $2r$ aber kleiner als $2,2r$ ist, gebraucht werden können. Ist endlich die Fläche irgend eines gegebenen Dreiecks der Fläche des im gegebenen Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks gleich, d. i. $= \frac{3}{4}r^2 \sqrt{3}$, so kann kein Winkel desselben zur Auflösung der Aufgabe gebraucht werden, wenn er nicht $= \frac{2}{3}R$ oder 60^0 ist.

Siebenter Satz.

Aufgabe. Fig. 3 und 7.

Unter den in der vorigen Aufgabe festgesetzten Bedingungen in einen gegebenen Kreis GVOML ein Dreieck zu beschreiben, das mit dem gegebenen Dreieck ABC nicht

nur gleiche Fläche, sondern auch einen Winkel hat, der einem Winkel (z. B. B C A) des gegebenen Dreiecks gleich ist.

Auflösung.

Man ziehe den Durchmesser G M. und setze an einen Endpunkt desselben (z. B. an M) den Winkel G M V = B C L = ½ B C A. (Fig. 3). Von dem Punkt V des Kreisumfangs ziehe man V H senkrecht auf den Durchmesser G M, und verlängere V H bis L im Kreisumfang. Ferner mache man H P = der Dreieckshöhe C E, und H R der halben Grundlinie des gegebenen Dreiecks, d. i = ½ A B, ziehe L P und aus dem Punkt R die mit L P parallele R S. Endlich ziehe man S O mit H V parallel, und verbinde den Punkt O im Kreisumfang mit den Endpunkten L und V der Sehne L V durch die geraden Linien O L und O V, so ist das Dreieck L O V das verlangte Dreieck.

Beweis.

Das Dreieck L O V ist dem gleichschenklichen Dreieck L S V, mit dem es auf der nemlichen Grundlinie L V und zwischen einerlei Parallelen L V und S O steht, gleich. Dieses aber ist = S H. L H, und auch (da R H : H S = L H : H P,) = H P. R H = C E. ½ A B = Dreieck A B C.

Ferner steht der Peripheriewinkel G O V mit dem Peripheriewinkel G M V auf einerlei Bogen G V, also ist der Winkel G O V = G M V = B C D im gegebenen Dreieck, = ½ A C B. Aber, da die Bögen L G und V G gleich sind, so ist der Winkel L O G = G O V = ½ A B C. Folglich L O G + G O V d. i. der Winkel L O V = dem Winkel A C B des gegebenen Dreiecks.

Achter Satz.

Lehrsatz. Fig. 8 und 9.

Das Dreieck ABC sey das gegebene Dreieck, und AENDG der gegebene Kreis, in welchen ein Dreieck ADE beschrieben worden, das mit dem gegebenen Dreieck ABC nicht nur gleiche Fläche, sondern auch einen Winkel DAE hat, der dem Winkel BAC des gegebenen Dreiecks gleich ist. Wenn nun das gegebene Dreieck an das im gegebenen Kreis beschriebene Dreieck ADE so gelegt wird, daß AE in AC, und AB in AD fällt, so ist das Dreieck BDF dem Dreieck CEF gleich, und wenn diese beiden Dreiecke BDF und CEF gleich sind, so sind auch die Dreiecke BCA und ADE gleich.

Beweis.

Das Dreieck ABC ist = Dreieck CEF + Viereck ABFE, und das Dreieck ADE = Dreieck BDF + Viereck ABFE. Da nun nach der Voraussetzung die Dreiecke ABC und ADE gleich sind, so ist das Dreieck CEF + Viereck ABFE = Dreieck BDF + Viereck ABFE. Folglich das Dreieck CEF = dem Dreieck BDF. Und umgekehrt, wenn das Dreieck CEF dem Dreieck BDF gleich ist, so ist, wenn man das gemeinschaftliche Viereck ABFE hinzusetzt, auch das Dreieck ABC dem Dreieck ADE gleich.

Zusatz.

In so fern ist dieser Satz richtig. Auch ist folgende Behauptung wahr: Wenn irgend ein gegebenes Dreieck ABC in einen gegebenen Kreis so gelegt werden kann, daß ein Winkelpunkt desselben, z. B. A in dem Kreisumfang liegt, ein Theil einer Seite des Dreiecks, z. B. der Theil

AE der Seite AC eine Sehne dieses Kreises ist, und die anliegende Seite AB ganz im Kreise sich befindet, ohne eine Sehne desselben zu seyn, und nun, wenn man AB bis an den Kreisumfang verlängert, und die Sehne DE zieht, das Dreieck CEF dem Dreieck BFD gleich ist, (oder daß sich BD : EC = AB : AE verhält,) so folgt die Gleichheit der Dreiecke ADE und ABC daraus. Ist hingegen das Dreieck CEF dem Dreieck BFD nicht gleich, so ist auch das Dreieck ADE dem Dreieck ABC nicht gleich. Wenn man aber nun weiter schließen wollte: Wenn also die Dreiecke CEF und BFD ungleich sind, so kann in diesen gegebenen Kreis kein Dreieck beschrieben werden, das dem Dreieck ABC gleich ist, und einen Winkel DAE hat, der dem Winkel BAC dieses gegebenen Dreiecks gleich ist, so ist dieser Schluß unrichtig. Z. B. Es sey (Fig. 10) ABC ein rechtwinkliches und gleichschenkliches Dreieck, dessen Hypotenuse BC dem Durchmesser des gegebenen Kreises gleich ist. Man verlängere AB bis D, und ziehe die Sehne DE, so sind die Dreiecke CEF und BFD nicht gleich. Denn gesetzt sie seyen gleich, so sind nach dem Erwiesenen auch die Dreiecke ADE und ABC gleich, und da das Dreieck ADE den rechten Winkel DAE gemeinschaftlich hat, so ist die Hypotenuse DE ein Durchmesser des gegebenen Kreises, also DE = BC, folglich das Dreieck ADE ein ungleichseitiges rechtwinkliches Dreieck dessen Hypotenuse DE der Hypotenuse BC des gleichschenklichen rechtwinklichen Dreiecks ABC gleich ist, daher ist das Dreieck ADE kleiner als das gegebene Dreieck ABC, welches gegen das Erwiesene ist. Also ist das Dreieck CEF dem Dreieck BFD nicht gleich. Daraus folgt nun umgekehrt wiederum ganz richtig, daß

die Dreiecke ADE und ABC ungleich sind, und daher das Dreieck ADE nicht das verlangte Dreieck ist. Allein, es folgt nicht daraus, daß nun gar kein rechtwinkliches Dreieck, das mit dem gegebenen gleiche Fläche hat, in diesen Kreis beschrieben werden kann, denn das gegebene gleichschenkliche und rechtwinkliche Dreieck, dessen Hypotenuse dem Durchmesser dieses Kreises gleich ist, kann selbst in diesen Kreis beschrieben werden.

Ferner, wenn (Fig. 9) die Dreiecke CEF und BFD gleich sind, folglich auch das Dreieck ADE dem gegebenen Dreieck ABC gleich ist, so folgt nicht daraus, daß, wenn das Dreieck ABC an eine andere Stelle des Kreises gesetzt wird, auch wiederum die Dreiecke CEF und BFD gleich, und daher das Dreieck ADE dem Dreieck ABC gleich seyn werde. Denn man ziehe den Durchmesser GH parallel mit AC. Gesetzt nun AC ist größer als der Durchmesser GH, so wird, wenn AC mit sich selbst parallel gegen GH zu, und darüber hinaus rückt, die Spitze B des gegebenen Dreiecks ABC sich immer mehr dem Kreisumfang nähern, also die Verlängerung BD immer kleiner und endlich = Null werden. Die kürzeste Länge der CE aber ist $= AC - GH$, wenn nemlich AE bis zu dem Durchmesser GH gerückt ist. Kommt AE darüber hinaus, so wird CE wieder größer. Da aber, woferne das Dreieck CEF dem Dreieck BFD gleich ist, sich $EC : BD = AE : AB$ verhält, so ist $CE = \frac{AE}{AB} BD$, ist also $BD = 0$, so ist auch CE = Null, dieses ist aber unmöglich, da nach der Voraussetzung AC größer als GH ist. Da auch wenn bei dem Fortrücken des Dreiecks ABC immer die entstehenden Dreiecke BFD und CEF gleich sind, $BD = \frac{AB}{AE} EC$,

A B aber eine beständige, unveränderliche Größe ist, auch überdieß bey dem mit sich parallelen Fortrücken des Dreiecks A B C gegen G H zu, und darüber hinaus, A E so wie C E nicht Null werden oder verschwinden kann, so wird auch $\frac{AB}{AE}$ E C nicht Null, oder B D kann auch nicht verschwinden. Nun ist aber dieses möglich, also muß bey dem Fortrücken das Dreieck A B C zu Stellen gelangen, wo BD nicht $= \frac{AB}{AE}$. E C ist, also auch E C : B D, sich nicht wie A E : A B verhält, folglich das Dreieck C E F nicht dem Dreieck B F D gleich, und daher auch das Dreieck A D E nicht dem Dreieck A B C gleich ist. Daraus darf aber nicht geschlossen werden, weil an dieser, oder an mehrern Stellen in diesem Kreise kein solches Dreieck beschrieben werden kann, sei auch überhaupt in diesem Kreise kein Dreieck A D E, welches dem gegebenen Dreieck A B C gleich ist, und den Winkel A mit demselben gemeinschäftlich hat, möglich. Dieses muß aus ganz andern Gründen geschlossen werden, wie ich in den vorigen Lehrsätzen und Aufgaben hinlänglich gezeigt habe.

Ich würde die Unrichtigkeit dieses Schlusses nicht so umständlich auseinandergesetzt haben, wenn nicht Herr Dr. Wer bei der Erklärung der bekannten mathematischen Stelle in Plato's Meno dem Socrates oder vielmehr dem Plato selbst eine solche Behauptung aufdringen wollte. Er übersetzt nemlich Seite 17 seiner Dissertation diese Stelle so:

„Si hoc spatium triangulum tale est, ut id, si quis praeter datam ejus lineam duxerit, deficiatur tali spatio, quale est extensum, aliud quid evenire

mihi videtur, et aliud rursus, si hoc subire non potest."

„Wenn diese dreiseitige Fläche so beschaffen ist, daß sie, wenn man über ihre gegebene Linie hinauszieht, um eine solche Fläche kleiner wird, als die verlängerte ist, so scheint mir daraus etwas anderes zu folgen, als aus dem, wenn sie keine solche Construction zuläßt."

Im Griechischen heißt sie nach der gewöhnlichen Leseart:

„Εἰ μέν ἐστι τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦτον, οἷον, παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν παρατείναντα ἐλλείπειν τοιούτῳ χωρίῳ, οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ῇ, ἀλλο τι συμβαίνειν μοι δοκεῖ. Και ἄλλο αὖ, εἰ ἀδύνατόν ἐστι ταῦτα παθεῖν.

An diesem Text ändert Herr Dr. Wer nichts, ausser daß er statt παρατειναντα lieber παρατείναντος (τινος) liest.

Hierauf erläutert er diese mathematische Stelle so:

„Der Hauptpunkt ist, ob das gegebene Dreieck an einem Theil so verändert werden kann, daß ein neues Dreieck entsteht, welches mit dem gegebenen einerlei Flächeninhalt hat, und in den gegebenen Kreis eingetragen werden kann. (Seite 16.) Man stelle sich also vor, Socrates, der mit Meno sich unterhält, zeichne mit einem Staab mathematische Figuren in den Sand, und zwar einen Kreis AGDHE (Fig. 9.) dessen Halbmesser KG ist, und ein Dreieck ABC (Fig. 8.), dessen eine Seite AC länger sey, als der Durchmesser GH dieses Kreises, damit es bei dem ersten Anblick scheine, als wäre dieses Dreieck zu

groß, als daß es in den daneben gezeichneten Kreis beschrieben werden könne.“ Nun ferner (Seite 17.) „Zuerst trägt Socrates das gegebene Dreieck ABC, so gut es sich thun läßt, in den Kreis, indem er einen Winkel BAC mit dessen Schenkeln AB und AC an den Kreisumfang im Punkt A hinschiebt, aber da nun die zwei Seiten AC und BC über den Kreisumfang hinaus sich erstrecken, so παρατείνει παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν AB, das heißt: Socrates zieht die Linie AB über ihre gegebene Länge fort, nemlich bis sie im Punkt D den Kreisumfang erreicht. Bis wohin er nun diese Linie verlängerte, brauchte er nicht mit Worten anzugeben, weil blos vom Beschreiben eines Dreiecks in einen Kreise die Rede ist, und Meno diese Construction machen sah. Hierauf verbindet Socrates durch eine neue Linie DE den Punkt D mit der andern Dreiecksseite AC in E, welches er auch nicht zu sagen brauchte, da jeder die Nothwendigkeit davon von selbsten einsieht, der weiß, daß hier von dem Beschreiben eines Dreiecks in einen Kreis die Rede ist, und das Ziehen der DE durch die Verlängerung der andern Linie AB hinlänglich angedeutet worden ist, welche eben zu diesem Zweck (DE ziehen zu können,) vorgenommen wurde.“

„Die Bedingung ist also folgende. Wenn nach dieser vorgenommenen Construktion das gegebene Dreieck ABC so beschaffen ist, daß die Fläche FEC welche nun daran fehlt, der Fläche BDF welche dafür hinzukommt, gleich ist, so kann ein Dreieck von gegebenem Flächeninhalt in den gegebenen Kreis beschrie-

ben werden.“ Endlich Seite 21: „Es kann aber dieses nicht geschehen, wenn diese Veränderung nicht damit vorgenommen werden kann, nemlich wenn, nachdem die Seite A B verlängert, die Linie DE gezogen, und so das in den Kreis beschriebene Dreieck A D E construirt worden, die Gleichheit der Dreiecke F E C und B D F nicht statt findet.“

Nach dieser Ansicht handelt es sich also in dieser Stelle nicht etwa von der Bedingung des Beschreibens eines dem gegebenen gleichen Dreiecks in einen gegebenen Kreis überhaupt, wie der Verfasser vorher äusserte, sondern eigentlich eines solchen Dreiecks, das ausser der dem gegebenen Dreieck gleichen Fläche, auch noch einen Winkel hat, der einem bestimmten Winkel des gegebenen Dreiecks gleich ist. Wenn wir nun der Meynuug des Verfassers beitretten, und seine Erklärung dieser Stelle für die richtige halten wollten, so müßten wir entweder dem Plato nicht hinlängliche mathematische Kenntnisse zuschreiben, oder zugeben, daß er nicht im Stande war, seinen Gegenstand richtig und evident darzustellen. Denn begreiflich müßte nach dem, was ich im sechsten Satz und im Zusatz des achten bewiesen habe, die Stelle vollständig und genau ausgedrückt so heisen:

Wenn ein Dreieck und ein Kreis gegeben sind, und es soll bestimmt werden, ob ein Dreieck in diesen Kreis beschrieben werden kann, das nicht nur dem gegebenen gleich ist, sondern auch einen Winkel hat, der einem angegebenen Winkel des gegebenen Dreiecks gleich ist, so kommt es darauf an, ob, wenn das gegebene Dreieck mit der Spitze desjenigen Winkels, den das zu beschreibende Dreieck auch haben soll, an einen beliebigen Punkt des

Kreisumfangs gelegt, und um diesen Punkt in der Ebene in der sich der Kreis befindet, gedreht wird, dasselbe in eine solche Lage gebracht werden kann, daß 1) eine von den beiden Dreiecksseiten die den erwähnten Winkel bilden, nicht ganz im Kreise sich befindet, sondern ein Theil davon ausserhalb der Kreisfläche liegt, hingegen die andere dieser beiden Seiten, ganz in der Kreisfläche so liegt, daß ihr zweiter Endpunkt nicht in den Kreisumfang fällt, und 2) daß, wenn hierauf (Fig. 9.) diese Seite bis zum Kreisumfang verlängert und die Sehne DE gezogen wird, die Dreiecke BDF und FEC gleich sind: Wenn aber dieses nicht stattfindet, das heißt, wenn das gegebene Dreieck durch das Drehen um den Punkt A nicht in diese Lage im Kreise gebracht werden kann, daß die Dreiecke BDF und FEC entstehen, und einander gleich sind, so kann entweder gar kein Dreieck in diesen Kreis beschrieben werden, das dem gegebenen Dreieck gleich ist, und den Winkel am Punkt A mit demselben gemeinschäftlich hat, oder das gegebene Dreieck ist selbst das verlangte Dreieck, das heißt: das gegebene Dreieck kann selbst in den gegebenen Kreis so eingetragen werden, daß dessen drei Winkelpunkte im Kreisumfang liegen. Wenn man aber nur einige Lagen des gegebenen Dreiecks im Kreise auf Gerathewohl annehmen wollte, und die beiden Dreiecke BDF und FEC dabei ungleich fände, so würde dieses gar nichts entscheiden.

Da nun von allen diesen erforderlichen Bedingungen und Einschränkungen im griechischen Text keine Spur enthalten ist, ja vielmehr, nach des Herrn Dr. Wex versuchten Erklärung, das Gegentheil davon behauptet wird, dem Plato aber, der als ausgezeichneter Geometer an der Auflösung der Delischen Aufgabe Theil nahm, und auf

mechanische Art vermittelst eines zu diesem Zweck erfundenen Werkzeuges, zwischen zwei gegebenen geraden Linien zwei mittlere geometrische Proportionallinien fand, wohl nicht die wahren Bedingungen hätten, unbekannt seyn können, so ist unwahrscheinlich, daß Plato in dieser mathematischen Stelle diesen Gegenstand untersucht habe.

Mehreres über die Fortschritte der Griechen in der Geometrie zu Plato's Zeit, die gewöhnlich für zu geringe gehalten werden, habe ich schon in der Vorrede zu der auserlesenen mathematischen Bibliothek, vorgetragen, auch zugleich Professors Mollweide Erklärung dieser mathematischen Stelle, und seine Einwendungen gegen meine Ansicht einer ausführlichen Prüfung unterworfen. Ferner beweiset der Verfasser (Seite 22, seiner Dissertation,) daß wenn (Fig. 9.) der Durchmesser GH des gegebenen Kreises zu einer Seite A C des gegebenen Dreiecks sich verhält, wie die kürzere Seite AB dieses Dreiecks zur Sehne AE die ein Theil der Seite AC ist, das dem gegebenen Dreieck gleiche Dreieck ADE nicht nur einen spitzigen Winkel A hat, der dem Winkel A des gegebenen Dreiecks gleich ist, sondern auch überdies einen rechten Winkel E, und sagt S. 23, diese Bedingung $GH : AC = AB : AE$ lehre, ob ein gegebenes Dreieck so beschaffen sey, daß es in den gegebenen Kreis eingetragen werden könne, und wie man dabei zu verfahren habe. Dieses ist wohl zu unbestimmt ausgedrückt, weil auch, wenn diese Proportion nicht statt findet, unter andern Bedingungen, die ich in der vorigen Theorie angegeben habe, unzählich viele Dreiecke, wovon jedes dem gegebenen gleich ist, in den gegebenen Kreis beschrieben werden können, sondern man ist eigentlich, wenn diese Proportion statt findet, überzeugt, daß das dem gegebenen Dreieck gleiche Dreieck noch über-

dieß rechtwinklich ist, und den Winkel A mit dem gegebenen Dreieck gemein hat. Wenn aber bei diesem nemlichen Dreieck A B C der kleinere spitzige Winkel C desselben an den Kreisumfang statt des Winkels A so gelegt würde, daß die Seite B C in die Lage der A B kommt, so nemlich, daß der Mittelpunkt des Kreises in B C liegt, so kann gar kein solches dem gegebenen gleiches Dreieck, das den spitzigen Winkel C mit dem gegebenen Dreieck gemein hätte, in den Kreis beschrieben werden, weil der Winkel C kleiner ist, als der Peripheriewinkel desjenigen gleichschenklichen Dreiecks, das mit dem gegebenen Dreieck gleiche Fläche, und eine Grundlinie hat, die kleiner ist, als die Seite des in diesen Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks. (Man sehe den sechsten Satz der vorigen Theorie.)

Endlich sagt der Verfasser (Seite 6 seiner Abhandlung,) daß die Worte παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν sehr genau zusammenhängen, und folglich nichts dazwischen eingeschaltet werden dürfe. Dieser Meinung bin ich nicht. Denn im mathematischen Sinne kann τὴν δοθεῖσαν, wenn man αὐτοῦ auf χωρίον τρίγωνον bezieht, nicht wohl wegen des vorgesetzten Artikels τὴν mit γραμμὴν verbunden werden, wenn γραμμὴ eine Seite des gegebenen Dreiecks bezeichnen soll. Denn wenn das Dreieck gegeben ist, so sind auch dessen drei Seiten gegeben. Ist nun dieses Dreieck kein gleichseitiges Dreieck, also diese drei Seiten nicht von einerlei Länge, so ist es nicht immer gleichgültig, welche von diesen Seiten genommen wird, und daher eine bestimmte Angabe erforderlich, welche Seite zu nehmen ist, z. B. bei dem rechtwinklichen Dreieck entweder die Hypotenuse oder eine Kathete, bei einem

gleichschenklichen Dreieck entweder die Grundlinie oder ein Schenkel u. s. f. Auch ist es klar, daß wenn zwischen die angegebenen Worte nichts eingeschaltet werden darf, in der ganzen Stelle nichts vom Verhältniß des Durchmessers des gegebenen Kreises zu irgend einer Seite des gegebenen Dreiecks, oder von irgend einer andern Beziehung der gegebenen Kreisfläche zur gegebenen Dreiecksfläche erwähnt wird, also wie jeder sogleich einsieht, gar nichts mit dieser mathematischen Stelle anzufangen ist, wenn man nicht entweder dieses Fehlende in der Urschrift zu ergänzen, oder in der Erklärung und weitern Ausführung dieser Stelle zu ersetzen sucht, wie der Verfasser gethan hat. Denn wenn er auch im Text nichts ändert, so fordert er statt dessen, daß der Leser den Socrates, wie der Zuschauer den Schauspieler auf dem Theater sieht, sich vorstellen soll, mit dem Staab in der Hand die Figuren im Sand entwerfend, und nach entworfenem Kreis zuerst das Dreieck ausser den Kreis zeichnend, sodann eines zum Theil in dem Kreis stehende Dreieck, welches das in die Kreisfläche auf eine ganz willkürliche Art gerückte gegebene Dreieck vorstellen soll, hierauf noch diejenige Dreiecksseite, welche ganz in der Kreisfläche liegt, verlängernd, und endlich eine Sehne als Verbindungslinie der beiden durch diese Construction entstandenen Sehnen ziehend. Statt aller dieser Constructionen (die des Kreises und des Dreiecks, als die beiden gegebenen F i g u r e n, wie gewöhnlich vorausgesetzt,) deutet Plato mit Worten nur eine einzige Construction und zwar mit dem mathematischen Kunstausdruck παρατείναντα an. Dieser Ausdruck war gewiß zu Plato's Zeit die Bezeichnung eines genau bestimmten Begriffs, aber er wurde nicht mehr von den spätern Mathematikern gebraucht, und wahrscheinlich

ist zur Bezeichnung des nemlichen Begriffes ein anderes Kunstwort eingeführt worden. Allein nun entsteht die Frage, welches? ἐκβάλλειν, verlängern, dieses giebt aber in dieser Stelle entweder gar keinen, oder wenigstens bei der Construction des Hrn Dr. Wex einen erzwungenen Sinn, indem nemlich παρατείναντος die Handlung des Verlängerns, und zugleich χωρίον παρατεταμένον das hinzugefügte oder hinzugekommene Dreieck bedeuten soll, ferner παραβάλλειν, eine Figur an eine gerade Linie setzen, und wenn blos die gerade Linie gegeben ist, auf derselben eine verlangte Figur beschreiben, oder wahrscheinlicher irgend ein anderer Ausdruck. So wird z. B. von keinem spätern mathematischen griechischen Schriftsteller, dessen Schriften wir noch besitzen, der Begriff mit dem Wort δύναμις verbunden, welchen Plato im Theätet damit verbindet. Nemlich er versteht unter δύναμις die Seite eines Quadrats, welches das Schema einer länglichen Zahl ist, oder die als gerade Linie dargestellte Quadratwurzel einer unvollkommenen Quadratzahl. So ist z. B. die Diagonale eines Quadrats eine δύναμις in Plato's Sinne. Nach Euklid aber heisen solche gerade Linien: δυνάμει σύμμετροι, die von Plato τοῖς ἐπιπέδοις σύμμετροι genannt werden, und so ist nach Euklid die Diagonale eines Quadrats: εὐθεῖα γραμμὴ δυνάμει σύμμετρος τῇ πλευρᾷ τοῦ τετραγώνου. Nach Plato hingegen: εὐθεῖα γραμμὴ ἐπιπέδῳ σύμμετρος τῇ πλευρᾷ τοῦ τετραγώνου. Endlich gebraucht Diophantus die Benennung δύναμις für das Quadrat selbst. Wie unrichtig würde man verfahren, wenn man die Bedeutung der Platonischen δύναμις in Euklid's oder Diophantus Werken suchen wollte. Die Theorie der δυναμις nach Plato, habe ich in dem Com-

mentar über zwei dunkle mathematische Stellen in Plato's Schriften, Nürnberg 1797, hinlänglich ausgeführt.

Die wahre Bedeutung des Ausdrucks παρατείνειν nach Plato könnte nun gleichfalls aus dem Zusammenhang gefunden werden, wenn die vorhin erwähnte Lücke zu ergänzen wäre. Dieses ist nun aber wiederum wegen der Unverständlichkeit und Zweideutigkeit des noch vorhandenen Theils dieser Stelle sehr schwer, nur so viel muthmasse ich, daß αὐτοῦ zweimal vorkam, nemlich das erstemal sogleich nach δοθεῖσαν, wo es sich auf den Kreis bezieht, und also διαμετρον oder der Name einer andern im Kreis befindlichen Linie, und sodann noch mehrere, vielleicht einen ganzen Satz bildende Worte folgen konnten, nach welchen zunächst αὐτοῦ zum zweitenmal stand, worauf γραμμὴν und was jetzt noch im Text steht, folgte, nemlich ungefehr so: οἷον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ διαμετρον .... αὐτοῦ γραμμὴν παρατείναντος u. s. f. Wer nemlich Correcturen lieset, weiß, daß auch noch jetzt, wenn in einer Handschrift zwischen einem zweimal vorkommenden Worte einige andere Worte befindlich sind, von den Setzern öfters das zum erstenmal vorkommende Wort mit dem zweiten verwechselt, folglich manchmal ein ganzer Satz übersprungen wird, besonders wenn das wiederholte Wort auf der folgenden Zeile unter dem in der vorhergehenden Zeile zum erstenmal befindlichen Wort steht.

Ueberdieß ist hinlänglich bekannt, wie fehlerhaft fast alle Abschriften der alten griechischen Mathematiker, die wir noch besitzen, sind, wovon ich nur den Codex, nach welchem des Proklus Commentar über das erste Buch

der Elemente Euclid's in der von Simon Grynäus zu Basel 1533 besorgten Ausgabe dieser Elemente abgedruckt wurde, und dasjenige anführe, was Professor Camerer in seiner Schrift Apollonii de tactionibus quae supersunt, aus Pappus collectionibus math. mittheilt, nemlich dessen λήμματα ἐις τα περὶ ἐπαφῶν βιβλία, nach drei Handschriften, zwei Pariser und eine Straßburger, bearbeitet. In diesen drei Manuscripten findet sich in dem Beweise des Satzes K (in Camerers Schrift, S. 30.) der Fehler, den ich in Plato's mathemat. Stelle vermuthe. Hier soll es nemlich heisen: καὶ ἀπὸ τῶν η, ϑ, σημείων τῇ αδ ὀρϑαὶ ἤχϑωσαν αἱ [ηκ, ϑλ, καὶ ἐπεζεύχϑω ἡ κλ. Καὶ ἴση ἐςὶν ἡ] ηκ τῇ ϑλ. In den drey Handschriften aber fehlt das, was ich eingeklammert habe, augenscheinlich weil ein Abschreiber das ηκ, ϑλ, welches in dem Manuscript das er vor sich hatte stand, mit dem eine Zeile darauffolgenden ähnlichen ηκ τῇ ϑλ verwechselte, und bei den andern beiden Handschriften diese fehlerhafte Handschrift zum Grunde lag. Ferner heißt es am Schluß des Beweises des Satzes κ β (Seite 32 bei Camerer,) in dem ersten Pariser Codex n. 2368. ganz ohne Sinn: ὅπερ μένει δ᾽ἀυτοῦ, καὶ τα πτωτικὰ ἀπὰγεται γαρ ἐις τὰ πτωτικὰ τοῦ ἐικοςοῦ τὸ ἀπάγεται. Der zweite n. 2440. hat: ὅπερ μενει . . . . . ἀπάγεται ἐις τὰ πτωτικὰ τοῦ ες τοῦτο ἀπὰγεται. Der Straßburger hat: ὅπερ μενει . . . . . ἀπάγεται γαρ τοῦ ες τοῦτο ἀπάγεται. Professor Camerer hat diese verdorbene Stelle so verbessert: ὅπερ μένει δ᾽ἀυτοῦ, καὶ τά πτωτικὰ ἀπάγεται ἐις τὰ πτωτικα τοῦ ἐις. τὸ ις΄, und sagt Seite 20. in der

Anmerkung: Periti harum rerum judices norunt, in hoc librorum genere, si rei natura, si veritas mathematica, si demonstrationis nexus lectionem aliquam postulet, nihil contra valere, omnium librorum manuscriptorum auctoritatem.

Anhang.

I.

Erster Satz

Lehrsatz. Fig. 11.

Wenn ein Dreieck A B C und überdieß ein Punkt D in der Ebene in der sich das Dreieck befindet, er mag übrigens innerhalb des Dreiecks, oder ausserhalb desselben in der verlängerten Dreiecks-Ebene liegen, gegeben ist, ein Dreieck von gegebenem Flächeninhalt zu beschreiben, welches nicht nur einen Winkel hat, der einem Winkel des gegebenen Dreiecks gleich ist, sondern dessen eine Seite oder deren Verlängerung auch durch den gegebenen Punkt geht.

Auflösung und Beweis.

Erster Fall. Es sey (Fig. 11.) das Dreieck A B C das gegebene Dreieck, D der gegebene Punkt, welcher innerhalb des gegebenen Dreiecks liegt, und f der gegebene Flächeninhalt des zu beschreibenden Dreiecks, welches einen Winkel, der dem Winkel A B C gleich ist, haben soll, und dessen eine Seite F H durch den gegebenen Punkt D geht.

Wenn nun das Dreieck C F H dieses verlangte Dreieck vorstellt, so ziehe man aus dem gegebenen Punkt D auf

eine der beiden Seiten, welche einen von den spitzigen Winkeln des gegebenen Dreiecks bilden, z. B. auf B C die senkrechte $DE = p$, und ziehe die gerade Linie $CD = h$, so ist $CE = \sqrt{(h^2 - p^2)} = d$. Ferner ziehe man aus dem Punkt F auch auf B C die senkrechte $FG = y$ und es sei $CG = z$, $CH = x$, der gegebene Winkel $ACB = q$, und der gegebene Flächeninhalt des Dreiecks $CFH = f$, so ist $\frac{1}{2}xy = f$, folglich $y = \frac{2f}{x}$. Ferner verhält sich, da F G mit D E parallel ist,

$$EH : ED = GH : FG$$

d. i. $CH - CE : ED = CH - CG : FG$

oder $x - d : p = x - z : y$

also, da $y = \frac{2f}{x}$ war, ist $\frac{p(x-z)}{x-d} = \frac{2f}{x}$,

und folglich $\frac{px^2 - 2fx + 2df}{px} = z$.

Es verhält sich aber auch im rechtwinklichen Dreieck C G F

$$1 : \text{tang } FCG = CG : GF$$

d. i. $1 : \text{tang } q = z : y$

also $z \text{ tang } q = y = \frac{2f}{x}$

$$\text{daher } z = \frac{2f}{x \text{ tang } q} = \frac{2f}{x} \cdot \frac{1}{\text{tang } q} = \frac{2f \text{ cotang } q}{x}.$$

$$\text{Daraus folgt: } \frac{px^2 - 2fx + 2df}{px} = \frac{2f \text{ cotang } q}{x}$$

also $px^2 - 2fx + 2df = 2pf \text{ cot. } q$

$$x^2 - \frac{2f}{p}x = 2f \text{ cot. } q - \frac{2df}{p}$$

und $CH = x = \frac{f}{p} \pm \sqrt{\left[2\left(\text{cot. } q - \frac{d}{p}\right)f + \frac{f^2}{p^2}\right]}$

oder $CH = x = \frac{f \pm \sqrt{[2(p^2 \cot. q - dp) f + f^2]}}{p}$

Beispiel. Es sey $CE = d = 11''$, $DE = p = 9''$ $AB = 30''$, $BC = 28''$ und $AC = 24''$, also der Winkel $ACB = q = 70^\circ$, und $\cot. 70^\circ = 0{,}36397$. Endlich sey die Fläche f des gesuchten Dreiecks $= 150''$, so ist

$$CH = x = \frac{150 \pm \sqrt{[2(81 . 0{,}36397 - 99) 150 + 22500]}}{9}$$

$$\text{oder } x = \frac{150 \pm \sqrt{[-20855{,}53 + 22500]}}{9}$$

$$\text{d. i. } x = \frac{150 \pm \sqrt{1644{,}47}}{9} = \frac{150 \pm 40{,}552}{9}$$

Also $x = + 21'',172$ und $= + 12'',161$.

Für dieses Beispiel lassen sich also zwei Dreiecke beschreiben, welche der Augabe Genüge leisten.

Man mache nemlich 1) vom Punkt C aus, auf der Seite CB oder dieser verlängerten Seite, $CH = 21'',172$, und verbinde die Punkte H und D mit einer geraden Linie, die man verlängert, bis sie mit AC oder deren Verlängerung in einem Punkt zusammentrifft, so ist CFH das erste verlangte Dreieck, dessen Fläche $= f$ und der eine Winkel $= q$ ist, und dessen eine Seite FH durch den gegebenen Punkt geht.

Hierauf mache man 2) $CL = x = 12'',161$, ziehe LD und verlängere sie bis M, so ist CML das zweite verlangte Dreieck, dessen Fläche $= f$, der eine Winkel $= q$ ist, und dessen Seite LM durch den gegebenen Punkt D geht.

Anmerkung.

1) Wenn der gegebene Winkel q stumpf ist, so ist cotang. q = — cotang (180° — q),

also $x = \frac{f \pm \sqrt{[f^2 - 2(p^2 \cot(180^\circ - q) + dp) f]}}{p}$,

oder $x = \frac{f \pm \sqrt{[f^2 - 2(p^2 \tang.(q - 90^\circ) + dp) f]}}{p}$

2) Wenn der gegebene Winkel q ein rechter Winkel ist, so ist cotang. q = 0, also $x = \frac{f \pm \sqrt{[(f - 2dp) f]}}{p}$.

3) Wenn der gegebene Winkel $q = \frac{1}{2} R = 45^\circ$ ist, so ist cotang q = 1, also $x = \frac{f \pm \sqrt{[2(p-d) p f + f^2]}}{p}$

4) Wenn x negativ wird, und der Winkel A C B (Fig. 11.) der gegebene Winkel q ist, den auch das verlangte Dreieck haben soll, so trage man den gefundenen negativen Zahlenwerth der Linie x oder C H von C aus, nicht auf C B und deren Verlängerung über B hinaus, sondern auf die rückwärts über C hinaus verlängerte B C. Es sey z. B. C N = — x, so ziehe man N D, welche den zweiten Schenkel des gegebenen Winkels q im Punkt P schneidet, so ist das Dreieck C N P das verlangte Dreieck, dessen Flächeninhalt = f ist, bey dem aber in diesem Fall der Winkel N C P dem Nebenwinkel von q gleich ist, und nicht die Seite N P selbst, sondern nur deren Verlängerung P D durch den gegebenen Punkt D geht.

5) Wenn der ganze Ausdruck unter dem Quadratwurzelzeichen negativ wird, so sind die beiden Wer-

the von x unmöglich. In diesem Fall ist also kein Dreieck von der verlangten Art möglich.

6) Wenn in Fig. 11, wiederum der Winkel ACB als der Winkel q, welchen das verlangte Dreieck haben soll, gegeben ist, so ist es auch verstattet, auf der Seite CA von C an, die positiven Werthe von x aufzutragen, nachdem man vorher die DQ senkrecht auf AC gezogen, und als p angenommen, die CQ aber = d gesetzt hat. Uebrigens wird wie vorhin verfahren. Man erhält auf diese Art meistens ganz andere Werthe von x als die vorigen waren.

7) Endlich wenn in demnemlichen Dreieck ABC (Fig. 11.) bei dernemlichen Lage des Punktes D ein anderer Winkel, z. B. BAC als q, oder als derjenige, den das verlangte Dreieck auch haben soll, gegeben ist, so kann wiederum jeder der beiden Schenkel dieses Winkels, oder die Seite AB sowohl als die Seite AC zum Auftragen der Werthe von x gebraucht werden. Zieht man nun die senkrechte DQ vom Punkt D aus auf AC, und setzt sie = p, und AQ = d, so werden auch die Werthe von x auf AC von A aus aufgetragen, und von dem Endpunkt der Linie x durch D eine gerade Linie bis zu AB gezogen, um das verlangte Dreieck zu erhalten. Zieht man aber die Linie p vom Punkt D senkrecht auf die Seite AB, so ist das Stück der AB vom Punkt A an, bis zu dem Punkt, in welchem die senkrechte p auf AB trifft = d, und x wird nun auf AB vom Punkt A an, aufgetragen, u. s. f. Eben so kann auch noch der Winkel ABC = q, den das verlangte Dreieck bekommen soll, angenommen, und alsdann die beiden Seiten BA und BC, die diesen Winkel

bilden, gebraucht werden, um auf solche die positiven Werthe von x zu tragen. Auf diese Art kann man öfters bei demnemlichen gegebenen Dreieck ABC und bei unverrückter Lage des gegebenen Punktes D, sechs Dreiecke, von verschiedenen Formen construiren, die einen dem gegebenen gleichen Winkel haben, alle sechs einander gleich sind, (nemlich jedes = f,) und deren Grundlinien sich alle im gegebenen Punkt D schneiden.

Zweiter Fall. Wenn (Fig. 12.) der gegebene Punkt D in einer Seite, (z. B. in der Seite AB) des gegebenen Dreiecks ABC liegt.

Es sey BAC der Winkel, welchen das verlangte Dreieck, dessen gegebene Fläche = f ist, auch haben soll, so ziehe man DE senkrecht auf die Seite AC, so fällt, wenn der Winkel BAC ein spitziger Winkel ist, der Punkt E vor demselben, und es ist DE = p und AE = d. Es sey nun AF = x, also FD die Grundlinie des verlangten Dreiecks AFD, so liegt y in DE, folglich ist $y = DE = p$. Es ist aber $\frac{1}{2}xy = f$, also $y = \frac{2f}{x}$, d. i. $p = \frac{2f}{x}$, und daher $x = \frac{2f}{p}$. Daß dieses richtig ist, folgt auch daraus, daß, da $y = DE$ ist, $z = AE = d$ wird. Nun ist aber z tang $q = y$, also hier d tang $q = p$, also $\frac{p}{d} = \text{tang}\, q$, d. h. es verhält sich $d : p = 1 : \text{tang}\, q$, oder (Fig. 15.) $AE : ED = 1$ tang q, welches ganz richtig ist. Auch erhält man, wenn man in der allgemeinen Formel $\frac{d}{p}$ statt cotang q substituirt, 1) $x = \frac{2f}{p}$ und 2) $x = 0$.

Ist der gegebene Winkel BAC ein stumpfer Winkel, so ist AE, d. i. d negativ, so wie auch $z = d = AE$, also

$\cot \mathrm{ang}\, q = -\frac{d}{p}$, daher in der allgemeinen Formel für x der Ausdruck $p^2 \cot \mathrm{ang}\, q = -dp$, hingegen wird das in eben dieser Formel befindliche $-dp$, d. i. $-(+d.p) = +dp$, also $-dp + dp = 0$, und daher auch $2(-dp + dp)f = 0$, folglich $x = \frac{f \pm \sqrt{f^2}}{p}$, d. i. 1) $x = \frac{2f}{p}$, und 2) $x = 0$, wie vorhin. Also verhält sich $\frac{1}{2}p : \sqrt{f} = \sqrt{f} : x$. Auf diese Art kann auch hier x leicht geometrisch gefunden werden, wenn die Fläche f geometrisch gegeben ist. Die gefundene Linie x wird nun, da sie positiv ist, vom Punkt A an, auf die Seite AC, nach C zu getragen. Gesetzt nun, sie sey AF, (Fig. 12.) so wird noch FD gezogen, alsdann ist das Dreieck AFD das verlangte Dreieck.

Ist der Winkel B (Fig. 12.) als derjenige gegeben, welchen auch das verlangte Dreieck haben soll, so zieht man De senkrecht auf BC, so ist $De = p$, und $Be = d = z$. Also $x = \frac{2f}{p} = BG$, daher, wenn GD gezogen wird, ist BGD das verlangte Dreieck, dessen Fläche $= f$. Ist endlich der Winkel ACB der, welchen auch das verlangte Dreieck haben soll, so kann man die Seite CA und CB, die den Winkel ACB bilden, wählen. Nimmt man CB, so zieht man De auf CB senkrecht. Da nun der gegebene Punkt D weder in CA noch in CB liegt, so kann man die Formel $x = \frac{2f}{p}$ hier nicht gebrauchen, sondern man muß die allgemeine Formel

$$x = \frac{f \pm \sqrt{[2(p^2 \cot q - dp) f + f^2]}}{p}$$ anwenden.

Es sey nun De = p = 4″, und Cc = d = 10″, ACB = q = 70° und f = 80″, so ist cot. 70° = 0, 36397 dp = 10, $p^2 = 16$ und $f^2 = 6400$. Also $x = \frac{80 \pm \sqrt{928}}{4}$ $= \frac{80 \pm 30,46}{4} = 20 \pm 7,61$. Oder 1) x = 27″, 61 und 2) x = 12,39. Also finden hier zwei positive Werthe von x statt, die von C aus, auf CB aufgetragen werden. Für x = 12,39 mache man CH = 12,39 ziehe HD und verlängere sie, bis sie die andere von den Seiten die den Winkel ACB bilden, nemlich die verlängerte Seite CA schneidet, so ist das Dreieck CHL das verlangte Dreieck. Auf ähnliche Art verfährt man bei dem andern positiven Werth von x. Nimmt man die Seite CA, so ist DE = p und CE = d, und nun wird, um x zu finden, gleichfalls die allgemeine Formel angewendet.

Dritter Fall. Wenn (Fig. 13.) der gegebene Punkt D ausserhalb der Fläche des gegebenen Dreiecks ABC, nemlich in der Verlängerung dieser Dreiecksebene liegt.

Hiebei ist folgendes zu bemerken:

1) Wenn der gegebene Punkt D (Fig. 13.) so liegt, daß der Endpunkt E der senkrechten DE oder der Linie p zwischen den Endpunkten einer Seite des gegebenen Dreiecks ABC (z. B. auf der Seite BC zwischen ihren Endpunkten B und C) liegt. Hier kann die Formel

$$x = \frac{f \pm \sqrt{[2(p^2 \cot. q - dp) f + f^2]}}{p}$$

wie gewöhnlich gebraucht werden. Z. B. Es sey x als positiv gefunden worden, so mache man BF = x und ziehe FD, so ist das Dreieck HBF das ver-

langte Dreieck, dessen gegebene Fläche = f, ein Winkel HBF = ABC ist, und dessen Seite FH verlängert durch den gegebenen Punkt D geht. Ist aber x als negativ gefunden worden, so verlängere man die Seite BC über den Winkelpunkt B nach N zu, mache BM = x, ziehe DM, und verlängere sie, bis sie die gleichfalls über B verlängerte Seite AB in L schneidet, so ist das Dreieck BML das verlangte Dreieck, dessen Fläche = f, der Winkel MBL = dem Winkel ABC ist, und dessen eine Seite LM verlängert durch den gegebenen Punkt D geht.

2) Wenn der gegebene Punkt D′ so liegt, daß die senkrechte p oder DB in einen Winkelpunkt (z. B B) des gegebenen Dreieks ABC eintrifft. Unter dieser Bedingung ist d = o, also auch dp = o, folglich verändert sich die allgemeine Formel in diese:

$$x = \frac{f \pm \sqrt{[2\,p^2 \cot.q + f)\,f]}}{p}$$

Uebrigens ist die Verfahrungsart wie in Nr. 1.

3) Wenn der gegebene Punkt D″ so liegt, (Fig. 13.) daß der Endpunkt E″ der senkrechten D″E″ auf die Verlängerung einer Seite des gegebenen Dreiecks, (z. B. auf die Verlängerung BN der Seite BC) trift.

Hier ist BE″ oder d negativ, also

$$x = \frac{f \pm \sqrt{[2(p^2 \cot.q + dp)f + f^2]}}{p}$$

Uebrigens ist die Verfahrungsart wie Nr. 1. Auch werden die positiven x von B aus auf BC nach C zu, und die negativen x von B aus, auf der Verlängerung der BC nach N aufgetragen.

Zweiter Satz.

Aufgabe. Fig. 11, 12 und 13.

Wenn ein Dreieck ABC und überdieß ein Punkt D in der Ebene, in welcher das gegebene Dreieck liegt, gegeben ist, er mag übrigens innerhalb des gegebenen Dreiecks, (Fig. 11.) oder in einer Seite dieses Dreiecks, (Fig. 12.) oder ausserhalb desselben (Fig. 13.) liegen, ein Dreieck zu beschreiben, welches nicht nur entweder das mfache oder der mte Theil des gegebenen Dreiecks ABC ist, und einen Winkel hat, der einem Winkel des gegebenen Dreiecks gleich ist, sondern dessen diesem Winkel gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung auch durch den gegebenen Punkt D geht.

Auflösung.

Diese stimmt in allen Fällen mit der im nächstvorhergehenden ersten Satz dargestellten Auflösung überein, wenn man nur in der Formel des Werthes von x, statt der Fläche f des verlangten Dreiecks, mF oder $\frac{1}{m}$ F setzt, in welchem Ausdruck F die Fläche des gegebenen Dreiecks ABC bedeutet, das gegebene m kann übrigens jede positive ganze Zahl, oder auch jeder positive unächte Bruch seyn.

D. h. es ist $x = \frac{mF \pm \sqrt{[2(p^2 \cot. q - dp)mF + m^2F^2]}}{p}$

wenn die Fläche des verlangten Dreiecks = mF seyn soll.

Wenn sie aber $\frac{1}{m}$ F seyn soll, so ist

$$x = \frac{\frac{1}{m}F \pm \sqrt{\left[2\,(p^2 \cot. q - dp)\,\frac{1}{m}F + \frac{1}{m^2}F^2\right]}}{p}$$

Diese beiden Formeln werden für die verschiedenen vorhin angegebenen Fälle, auf die gleichfalls beschriebene Art geändert. Z. B. Wenn der Punkt D in einer Seite des gegebenen Dreiecks ABC liegt, so ist, wenn $f = m\,F$ seyn soll, $x = \frac{2\,m\,F}{p}$, und wenn $F = \frac{1}{m}F$ seyn soll, so ist $x = \frac{2\,F}{mp}$.

Dritter Satz.

Aufgabe. Fig. 11.

Ein gegebenes Dreieck ABC, in dessen Fläche, also innerhalb dessen Seiten, ein Punkt D gegeben ist, in den Fällen, wo es möglich ist, so in zwei Theile zu zerlegen, daß die Theile ein gegebenes Verhältniß $1 : m - 1$ haben, und die Theilungslinie FH (Fig. 14.) durch den gegebenen Punkt D geht.

Auflösung.

Da das gegebene Dreieck ABC in nicht mehr als zwei Theile getheilt werden soll, so muß wenigstens der eine Theil ein Dreieck seyn, der andere ist in den meisten Fällen ein Viereck, sey es ein Trapezoid oder Trapezium. Ist nun die Fläche des gegebenen Dreiecks $= F$, und es ist das durch die Theilungslinie FH abgeschnittene Dreieck $FCH = \frac{1}{m}F$, so ist das Viereck $ABHF = \frac{(m-1)}{m}F$, und das Dreieck FCH als der eine Theil, verhält sich

zum Viereck ABHF als dem zweiten Theil des gegebenen Dreiecks, wie 1 : m - 1. Ist aber das Dreieck FCH $= \frac{(m-1)}{m} F$, und das Viereck ABHF $= \frac{1}{m} F$, so verhält sich FCH : ABHF = (m - 1) : 1. Wenn sich also umgekehrt, das Dreieck zum Viereck verhalten soll wie 1 : (m - 1), so muß, nach der Auflösung der nächstvorhergehenden Aufgabe, ein Dreieck FCH beschrieben werden, das $= \frac{1}{m} F$ ist. Wenn aber das Dreieck sich zum Viereck ABHF verhalten soll = (m - 1) : 1, so ist ein Dreieck zu beschreiben, das $= \frac{(m-1)}{m} F$ ist.

Da aber das gegebene Dreieck ABC (Fig. 14.) selbst durch die Linie FH in zwei Theile getheilt werden soll, so muß die Linie FH ganz in der Fläche des Dreiecks ABC, und daher die Endpunkte F und H derselben in den Seiten CA und CB liegen. Daher darf CH oder x nicht größer seyn, als die Seite CB, und CF nicht grösser seyn, als die Seite CA. Nun sey CF = u, und FG = y, so verhält sich in dem bei G rechtwinklichen Dreieck FGC, wenn der Winkel ACB = q gesetzt wird: FG : CF = 1 : cosec. q, oder 1 : cosec. q = y : u, also ist u = y cosec. q, oder auch $\frac{y}{\sin q.} = u$.

Nun sey der gegebene Flächeninhalt des Dreieck FCH $= \frac{1}{m} F$ so ist $\frac{1}{2} x\, y = \frac{1}{m} F$, also $y = \frac{2F}{mx}$ und daher $u = \frac{2F}{mx \sin. q}$.

Aber da, wenn b und c die beiden Seiten des gegebenen Dreiecks, die den Winkel q bilden bezeichnen,

aus bekannten trigonometrischen Gründen $\sin. q = \frac{2F}{bc}$ ist, so ist $\frac{bc}{mx} = u$.

Hat man nun nach der allgemeinen Formel x berechnet, so darf man nur schliesen: $x : b = \frac{1}{m} c : u$, so findet man u vermittelst dieses Proportionalsatzes. Ist nun x positiv, und nicht größer als die Dreiecksseite b, worauf es getragen werden soll, und u positiv und auch nicht größer als die Dreieckseite c worauf es getragen werden soll, so ist die Auflösung der Aufgabe möglich. Ist aber x entweder negativ, oder zwar positiv, jedoch größer, als die erwähnte Dreiecksseite b, worauf es getragen werden soll, so sieht man sogleich, ohne u zu berechnen, daß die Auflösung unmöglich ist. Ist nun die Auflösung möglich, so trägt man, wenn der Winkel ACB (Fig. 14.) auch dem Dreieck FCH zukommen soll, die Linie x auf eine der beiden Seiten, welche den Winkel ACB bilden, z. B. auf $CB = b$, so daß $CH = x$ ist, und u auf die andere dieser beiden Seiten, (nemlich auf CA,) so daß $CF = u$ ist, und zieht die gerade Linie FH, so muß diese, wenn man richtig verfahren hat, durch den gegebenen Punkt D gehen, und es verhält sich der Theil CFH des gegebenen Dreiecks ABC zum Theil ABHF wie 1 zu $m - 1$. Z. B. Wenn $m = 2$ ist, so verhalten sich diese beiden Theile wie 1 : 1, und das gegebene Dreieck ABC ist durch die Theilungslinie in welcher der gegebene Punkt D liegt, halbirt werden, das Dreieck CFH aber ist $= \frac{1}{2}F$, oder die Hälfte des gegebenen Dreiecks.

Eben so kann man nun, wenn man den Winkel ACB noch beibehält, den Werth von x für die Seite CA be-

rechnen, und x auf CA tragen u. s. f. Eben so kann man bei den Winkeln CAB und ABC verfahren. Bei jedem Winkel können wiederum die beiden Seiten die ihn bilden, zum Auftragen des berechneten x gebraucht werden. Auf diese Art kann bei dem gegebenen Dreieck, in welchem der Punkt D unverrückt bleibt, die Linie x sechsmal berechnet werden, und da jede Berechnung zwei Werthe von x giebt, so findet man in allem zwölf Werthe von x, die manchmal alle verschieden sind, und von denen sehr oft einer oder mehrere der Aufgabe Genüge leisten.

Zusatz.

Diese Aufgabe findet ihre Anwendung in der Feldmeßkunst, wenn ein dreieckiges Feld nach einem gegebenen Verhältniß vermittelst einer geraden Linie, die durch den Ort eines Brunnens, der sich in diesem Feld befindet, und der von beiden Besitzern des Feldes benutzt wird, in zwei Theile getheilt werden soll.

Es sey z. B. ABC (Fig 11.) das dreieckige Feld, D die Stelle des gemeinschaftlichen Brunnens, durch welche die Theilungslinie gehen soll, und die beiden Theile der Besitzer sollen überdieß **gleich** werden. Man berechnet also den Flächeninhalt F dieses Feldes, am genauesten unmittelbar aus den drei gemessenen Seiten AB, BC und AC, nach der bekannten trigonometrischen Formel, wodurch man auch sogleich bequem, vermittelst einer kleinen Veränderung die drei Winkel, A, B und C sehr genau berechnen kann, weil nemlich z. B. $\sin. ACB = \frac{2F}{CA.CB}$ ist. Da nun der berechnete Flächeninhalt des Feldes $=$ F ist, so ist die Fläche des gesuchten Dreiecks $CFH = \frac{1}{2}F$. Fängt

man hierauf die Construction bei dem Winkel C, und auf der Seite CB an, so ist der Winkel C = q, CB = b, und CA = c. Zieht man ferner die senkrechte DE, und misset DE und CE, so hat man p und d. Man kann also leicht, da hier m = 2 ist, vermittelst der Formel

$$x = \frac{\frac{1}{2}F \pm \sqrt{[(p^2 \text{cotang. } q - dp) F + \frac{1}{4}F^2]}}{p}$$

wenn der Winkel q spitzig ist, ferner vermittelst der Formel

$$x = \frac{\frac{1}{2}F \pm \sqrt{[(\frac{1}{4}F + dp) F]}}{p}$$

wenn der Winkel q ein rechter ist, ferner vermittelst der Formel

$$x = \frac{\frac{1}{2}F \pm \sqrt{[(p-d) pF + \frac{1}{4}F^2]}}{p}$$

wenn der Winkel q ein halber rechter ist, oder 45° hat, endlich vermittelst der Formel

$$x = \frac{\frac{1}{2}F \pm \sqrt{[\frac{1}{4}F^2 - (p^2 \text{tang}(q - 90^0) + dp)F]}}{p}$$

wenn q ein stumpfer Winkel ist, die Werthe von x berechnen, und wenn diese tauglich sind, den Werth von CF $= u = \frac{\frac{1}{2}bc}{x}$ suchen, und wenn dieser nicht größer als die Seite CA ist, von C aus, denselben auf CA, so wie x auf CB tragen, und FH ziehen, so ist die Theilungslinie FH die verlangte. Eben so giebt der zweite positive Werth von x die zweite Theilungslinie LM. Auf ähnliche Art kann man wohl bei dem Gebrauch der übrigen Seiten und Winkel dieses Feldes noch mehrere Theilungslinien finden, welche der Aufgabe Genüge leisten.

Anmerkung.

Die Formel für x, kann, wenn die Fläche des gegebenen Dreiecks = F, die dem Winkel q desselben, welchen das verlangte Dreieck auch haben soll, gegenüberstehende Seite = a, und die diesen Winkel q bildenden Seiten, auf welche x und u getragen werden sollen, b. und c heisen, ferner die Fläche des verlangten Dreiecks $= \frac{1}{m} F$ seyn soll, auch so ausgedrückt werden:

$$x = \frac{F \pm \sqrt{[\frac{1}{2} m p^2 Q + (F - 2 mdp) F]}}{mp}$$

In dieser Formel ist $Q = (b + a) (b - a) + c^2$ welches daraus hergeleitet wird, daß cot. $q = \frac{\text{cosin } q}{\sin q}$, aber $\sin q = \frac{2F}{bc}$ und $\text{cosin } q = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2bc}$ ist, den sinus totus = 1 gesetzt. Vermittelst dieser Formel kann also x nicht nur ohne Hülfe der trigonometrischen Tafeln berechnet, sondern auch durch geometrische Construction bestimmt werden. Ist ferner das gegebene Dreieck gleichseitig, so ist $Q = a^2$, ist es gleichschenklich, nemlich $b = a$, so ist $Q = c^2$, ist aber $c = a$, so ist $Q = b^2$, und ist $b = c$, so ist $Q = 2c^2 - a^2$, ist es rechtwinklich, und c die Hypotenuse, so ist $Q = 2(c + a)(c - a)$, ist aber a oder b die Hypotenuse, so ist $Q = 2c^2$.

Wenn nun das gegebene Dreieck halbiret werden soll, so ist $m = 2$, also in diesem Fall

$$x = \frac{F \pm \sqrt{[p^2 Q + (F - 4dp) F]}}{2p}.$$

Bei der rein-geometrischen Construction der Linie x, gebe man dieser Gleichung folgende Form:

$$x = \frac{F}{2p} \pm \sqrt{\left\{\tfrac{1}{4}Q + \frac{F^2}{4p^2} - \frac{dF}{p}\right\}} = v \pm \sqrt{[\tfrac{1}{4}Q + v^2 - 2dv]}$$

oder $x = v + \sqrt{[\tfrac{1}{4}Q + (v - 2d)\,v]}$. Nun sey F ein Quadrat, dessen Seite $\sqrt{F}$ die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Höhe und halben Grundlinie des gegebenen Dreiecks ist, so ist $v = \frac{F}{2p}$, d. h. $2p : \sqrt{F} = \sqrt{F} : v$, hierauf $(v - 2d) : t = t : v$, so ist $t^2 = (v - 2d)v$, also nun $x = v \pm \sqrt{[\tfrac{1}{4}Q + t^2]}$ Endlich ist $\tfrac{1}{2}(b + a) : w = w : \tfrac{1}{2}(b - a)$, und daher $\tfrac{1}{4}Q = w^2 + \tfrac{1}{4}c^2$, folglich $x = v \pm \sqrt{[(\tfrac{1}{4}c^2 + w^2) + t^2]}$. Wenn man daher $\tfrac{1}{2}c$ u. w unter einem rechten Winkel zusammensetzt, und die Hypotenuse h zieht, so ist $h^2 = \tfrac{1}{4}c^2 + w^2$, setzt man mit h die Linie t eben so zusammen, und zieht die Hypotenuse H, so ist $H^2 = \tfrac{1}{4}c^2 + w^2 + t^2$, und H selbst $= \sqrt{[\tfrac{1}{4}c^2 + w^2 + t^2]}$, also $x = v \pm H$.

II.

Darstellung

des

Fortganggesetzes

einer unendlichen Reihe von Brüchen, $\frac{a}{b}, \frac{A}{B}, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ u. s. f. so daß wenn d eine gegebene ganze Zahl ist, durchaus $2\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 = 2\alpha^2 - \beta^2 = 2A^2 - B^2 = 2a^2 - b^2 = d^2$, und einer andern unendlichen Reihe von Brüchen $\frac{C}{D}, \frac{\gamma}{\delta}, \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ u. s. f., so, daß durchaus $2\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{D}^2 = 2\gamma^2 - \delta^2 = 2C^2 - D^2 = \sqrt{d^2} = d$ sei.

Erste Aufgabe.

Wenn eine ganze Zahl d gegeben ist, von der Beschaffenheit, daß $\frac{d+1}{2}$ oder, wenn n ein Theiler von d ist, $\frac{\frac{d}{n}+1}{2}$ eine vollkommene Quadratzahl ist, nicht nur zwei ganze Zahlen a u. b zu finden, so daß $2a^2 - b^2 = d^2$ ist, sondern auch so viele Glieder einer unendlichen Reihe von Brüchen $\frac{a}{b}, \frac{A}{B}, \frac{\alpha}{\beta} \ldots$ — bei denen immer $2\alpha^2 - \beta^2 = 2A^2 - B^2 = 2a^2 - b^2 = d^2$ ist, anzugeben, als verlangt wird.

Auflösung.

1) Für den ersten Theil der Aufgabe.

Erste Art der Auflösung.

Es sei $\frac{d+1}{2}$ eine vollk. Quadratz. $=(m+1)^2$, so ist $m=\sqrt{\frac{d+1}{2}}-1$. Daraus folgt, (wenn man in der Tabelle, die ich in den neuen Beiträgen zu den Berechnungsarten der Pythagoräischen Zahlendreiecke, Seite 65 aufgestellt habe, in den Buchstabenformeln $\frac{d+1}{2}$ statt m setzt, und gehörig reducirt,) 1) $d+2[1-\sqrt{2(d+1)}]=b$, und 2) $b+\sqrt{2(d+1)}=a$, und so wird $2a^2-b^2=d^2$ seyn.

Beweis.

Es ist $a=b+\sqrt{2(d+1)}$, und da $b=d+2-2\sqrt{2(d+1)}$ ist, so $a=d+2-\sqrt{2(d+1)}$, also $a^2=d^2+6d+6-(2d+4)\sqrt{2(d+1)}$, also

$$2a^2=2d^2+12d+12-(4d+8)\sqrt{2(d+1)}$$

aber $b^2=d^2+12d+12-(4d+8)\sqrt{2(d+1)}$

folglich $2a^2-b^2=d^2$.

Beispiele. Es sei $d=7$, so ist $\frac{d+1}{2}=4$ eine vollkommene Quadratzahl, also ist $d=7$ brauchbar, und b ist $=7+2-2\sqrt{2.8}=9-8=1$, endlich $a=b+\sqrt{2(d+1)}=1+4=5$. Also ist $2a^2-b^2=50-1=49=(7)^2=d^2$.

Es sei $d=17$, so ist $\frac{d+1}{2}=9$ eine vollkommene Quadratzahl, daher $b=17+2-2\sqrt{36}=19-12=7$, und $a=7+6=13$. Also ist $2a^2-b^2=338-49=289=(17)^2=d^2$.

Es sei $d=14$, so ist $d=2.7$, also $n=2$. Es ist aber $\frac{\frac{1}{2}d+1}{2}=4$ eine vollkommene Quadratzahl, also, wenn man

7 oder $\frac{1}{2}$ d statt d in den Formeln für a und b substituirt, $b = 9 - 8 = 1$, und $a = 1 + 4 = 5$. Folglich $n^2(2a^2 - b^2) = 4(50 - 1) = 4.49 = 196 = (14)^2 = d^2$, d. i. $2(na)^2 - (nb)^2 = d^2$, oder $200 - 4 = (14)^2$.

Es sei $d = 51$. Da nun $51 = 3.17$ ist, so ist $n = 3$, daher $\frac{d}{n} = \frac{51}{3} = 17$, folglich, wie vorhin berechnet wurde, $b = 7$ u. $a = 13$. Also ist $n^2(2a^2 - b^2) = 9.(338 - 49) = 9.289 = (3.17)^2 = (51)^2 = d^2$, d. i. $2(na)^2 - (nb)^2 = d^2$, oder $3042 - 441 = 2601 = (51)^2$.

Zweite Art der Auflösung.

Es sei wiederum $\frac{d+1}{2}$ oder auch $\frac{\frac{d}{n}+1}{2}$ eine vollkommene Quadratzahl, $= m^2$, so ist $m = \sqrt{\frac{d+1}{2}}$. Daraus folgt nach der S. 65 meiner vorhin angeführten Schrift aufgestellten Formel 1) $d + 2[1 + \sqrt{2(d+1)}] = b$, und 2) $b - \sqrt{2(d+1)} = a$.

Beweis.

Es ist $2a^2 = 2d^2 + 12d + 12 + (4d + 8)\sqrt{2(d+1)}$
und $b^2 = d^2 + 12d + 12 + (4d + 8)\sqrt{2(d+1)}$
Also $2a^2 - b^2 = d^2$.

Beispiele.

Es sei $d = 7$, so ist $b = 7 + 2(1 + 4) = 17$ und $a = 17 - 4 = 13$. Also $2a^2 - b^2 = 338 - 289 = 49 = (7)^2$.

Es sei $d = 14$, oder $d = 2.7$, so ist $n = 2$, also $\frac{d}{n} = 7$. Da nun $a = 13$ und $b = 17$ für $d = 7$ war, ; so ist $na = 2.13$ und $nb = 2.17$, und da $2a^2 - b^2 = d^2$ ist, so ist auch

$2(na)^2-(nb)^2=\frac{(nd)^2}{n^2}$, d. i. $2(2.13)^2-(2.17)^2=(2.7)^2$, oder $2(26)^2-(34)^2=(14)^2$, d. i. $1352-1156=196=d^2$.

Es sei $d=1$, so ist $b=1+2(1+2)=7$, und $a=7-2=5$. Also $2a^2-b^2=50-49=1=d^2$.

2) Für den zweiten Theil der Aufgabe.

Die Darstellung der Glieder der unendlichen Reihe von Brüchen $\frac{a}{b}\ \frac{A}{B}\ \frac{\alpha}{\beta}$ u.s.f., so daß $2\alpha^2-\beta^2=2A^2-B^2=2a^2-b^2=d^2$ ist, wird vermittelst der Formel $\frac{3a+2b}{4a+3b}$ da $2(3a+2b)^2-(4a+3b)^2=2a^2-b^2$ ist.

Nemlich es sey $A=3a+2b$ und $B=4a+3b$

so ist $A^2=9a^2+12ab+4b^2$

und $2A^2=18a^2+24ab+8b^2$

aber $B^2=16a^2+24ab+9b^2$

also $2A^2-B^2=2a^2-b^2$.

Setzt man nun ferner $\alpha=3A+2B$ und $\beta=4A+3B$, so kann man eben so zeigen, daß $2\alpha^2-\beta^2=2A^2-B^2$, und daher auch $=2a^2-b^2$ ist, u. s. w.

Z. B. Da $d=17$ gegeben war, ist gefunden worden $a=13$ und $b=7$, so daß $2a^2-b^2=d^2=289$ ist. In der Reihe, deren Glieder bestimmt werden sollen, ist also $\frac{a}{b}=\frac{13}{7}$ das erste Glied, das folgende Glied ist $\frac{A}{B}=\frac{3a+2b}{4a+3b}=\frac{39+14}{52+21}=\frac{53}{73}$, und es ist $2A^2-B^2=2.2809-5329=5618-5329=$

$289 = d^2$. Setzt man hierauf $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3A+2B}{4A+3B} = \frac{3.53+2.73}{4.53+3.73}$
$\frac{159+146}{212+219} = \frac{305}{431}$ so ist wiederum $2\alpha^2 - \beta^2 = 2.(305)^2 - (431)^2 = 186050 - 185761 = 289 = d^2$. Und so weiter ins Unendliche.

Man kann auch wieder rückwärts gehen, nemlich z. B. vom Bruch $\frac{A}{B}$ zu $\frac{a}{b}$ wenn man $\frac{a}{b} = \frac{3A-2B}{3B-4A}$ setzt.

Zweites Beispiel. Wenn $d = 17$ gegeben ist, so findet man auch nach der zweiten Art der Auflösung: $a = 25$ und $b = 31$, so daß $2(25)^2 - (31)^2 = 289 = (17)^2$ ist. Es ist also das erste Glied dieser zweiten Reihe, oder $\frac{a'}{b'} = \frac{25}{31}$ das folgende $\frac{M}{N}$ ist $= \frac{3a+2b}{4a+3b} = \frac{137}{193}$, so daß auch $2M^2 - N^2 = 2(137)^2 - (193)^2 = 37538 - 37249 = 289 = d^2$ ist. Das folgende Glied $\frac{\mu}{\nu}$ ist $= \frac{3M+2N}{4M+3N} = \frac{3.137+2.193}{4.137+3.193} = \frac{797}{1127}$. Und nun ist wiederum $2\mu^2 - \nu^2 = 2(797)^2 - (1127)^2 = 289 = (17)^2$.

Verbindet man die Glieder der beiden Reihen auf folgende Art:

$$\frac{a}{b},\ \frac{a'}{b'},\ \frac{A}{B},\ \frac{M}{N},\ \frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\mu}{\nu}\ \ldots \infty$$

oder in diesem Beispiel:

$$\frac{13}{7}, \frac{25}{31}, \frac{53}{73}, \frac{137}{193}, \frac{305}{431} \frac{797}{1127} \ldots \infty$$

so enthält diese zusammengesetzte Reihe alle möglichen Brüche oder Paare von ganzen Zahlen, bei denen immer der Unterschied zwischen dem doppelten Quadrat des Zählers und dem Quadrat des Nenners $= d^2$, oder in diesem Beispiel $= 289 = (17)^2$ ist.

Zweite Aufgabe.

Wenn eine ganze Zahl d gegeben ist, von der Beschaffenheit daß entweder 1) $\frac{d+1}{2}$, eine vollkommene Quadratzahl; oder 2) $d+2$ eine vollkommene Quadratzahl ist, nicht nur zwei ganze Zahlen a und b zu finden, so daß $2a^2 - b^2 = d$ ist, sondern auch so viele Glieder einer unendlichen Reihe von Brüchen, $\frac{a}{b}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, u. s. f., bei denen immer $2\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{D}^2 = 2\gamma^2 - \delta^2 = 2C^2 - D^2 = 2a^2 - b^2 = d$ ist, anzugeben als verlangt wird.

Auflösung und Beweis.

I. Es sei $\frac{d+1}{2} = m^2$, so ist $d = 2m^2 - 1$. Also wenn $2a^2 - b^2 = d$ seyn soll, und man setzt $b = 1$, so ist $2a^2 - 1 = d$, daher $m = a$, und $\frac{a}{b} = \frac{m}{1}$. Z. B. Es sei $d = 127$, so ist $\frac{d+1}{2} = 64 = m^2$. Also $\frac{m}{1} = \frac{8}{1} = \frac{a}{b}$. Und nun

ist $2a^2 - b^2 = 2a^2 - 1 = 2.64 - 1 = 128 - 1 = 127 = d$.

Ferner sey $d = 71$, so ist $\frac{d+1}{2} = \frac{72}{2} = 36$, also $\frac{a}{b} = \frac{m}{1} = \frac{\sqrt{36}}{1} = \frac{6}{1}$. Es ist also $2a^2 - 1 = 2.\ 36 - 1 = 72 - 1 = 71 = d$.

Will man hierauf die verlangten Glieder der angegebenen Reihe darstellen, so gebraucht man gleichfalls die Formel $\frac{3a+2b}{4a+3b}$ um das folgende Glied zu bestimmen.

Z. B. Wenn $\frac{m}{1}$ oder $\frac{a}{b} = \frac{8}{1}$ ist, so ist das folgende Glied $\frac{3.\ 8+2.\ 1}{4.\ 8+3.\ 1} = \frac{26}{35} = \frac{C}{D}$. So ist $2C^2 - D^2 = 2a^2 - b^2 = 2(26)^2 - (35)^2 = 1352 - 1225 = 127 = d$, wie gehörig. Das folgende Glied $\frac{\gamma}{\delta}$ ist $= \frac{3C+2D}{4C+3D} = \frac{3.26+2.\ 35}{4.26+3.\ 35} = \frac{148}{209}$ also ist auch $2\gamma^2 - \delta^2 = 43808 - 43681 = 127 = 2a^2 - b^2 = d$, wie gehörig.

Eine zweite brauchbare Reihe $\frac{e}{f}\ \frac{E}{F}\ \frac{\epsilon}{\Phi}\ \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}} \ldots$ erhält man, wenn man $-\frac{m}{1}$, d. i. $\frac{m}{-1} = \frac{a}{b}$ setzt, z. B. $\frac{8}{-1} = \frac{a}{b}$ gesetzt, giebt das erste Glied $\frac{e}{f} = \frac{3a+2b}{4a+3b}$

$= \frac{3.8+(-2)}{4.8+(-3)} = \frac{22}{29}$, und alsdann ist gleichfalls $2e^2 - f^2 = 968 - 841 = 127 = d$. Das folgende Glied $\frac{E}{F}$ wird eben so hergeleitet, und ist $= \frac{3.22+2.29}{4.22+3.29} = \frac{66+58}{88+87} = \frac{124}{175}$, und alsdann ist gleichfalls $2E^2 - F^2 = 30752 - 30625 = 127 = d$, wie gehörig.

Verbindet man hierauf die beiden Reihen, so enthält die neue Reihe

$$\frac{8}{1}, \frac{22}{29}, \frac{26}{35}, \frac{124}{175}, \frac{148}{209}, \frac{722}{1021}, \frac{862}{1219} \ldots \ldots$$

oder im Allgemeinen:

$$\frac{a}{b}, \frac{e}{f}, \frac{C}{D}, \frac{E}{F}, \frac{\gamma}{\delta}, \frac{\epsilon}{\phi}, \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{D}} \ldots \ldots$$

Diese aus den verbundenen Gliedern bestehende Reihe, enthält vollständig alle die Paare von ganzen Zahlen, bei denen der Unterschied des doppelten Quadrats der einen, die den Zähler bildet, und des einfachen Quadrats der andern, die den Nenner des nemlichen Bruchs bildet, der gegebene ganzen Zahl d gleich ist. Das was ich hier von dieser zweiten Reihe gesagt habe, und die Darstellung derselben nebst ihrer Verbindung mit der ersten, ist in meiner Schrift: neue Beiträge zum pythagoräischen Lehrsatz und den Berechnungsarten der pytha-

goräischen Zahlendreiecke übergangen worden, und ist daher daselbst Seite 9 des Anhangs, Zeile 10 einzuschalten.

II. Es sei $d+2$ eine vollkommene Quadratzahl also $\sqrt{(d+2)}$ = der ganzen Zahl t. Nun soll $2a^2-b^2=d$ seyn. Setzt man 1) $a=b+1$, so ist $2a^2-b^2=b^2+4b+2=d$. Also $b=-2+\sqrt{(d+2)}$, oder $b=t-2$, und $b+1=a=t-1$. Daher $\frac{a}{b}=\frac{t-1}{b}$. Z. B. Es sei $d=23$, so ist $\sqrt{(d+2)}=\sqrt{25}=5=t$. Also $a=t-1=4$, und $b=3$. Folglich $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$ Hierauf kann man vermittelst der Formel $\frac{3a+2b}{4a+3b}$ folgende Glieder einer unendlichen Reihe finden: $\frac{4}{3}, \frac{18}{25}, \frac{104}{147}, \frac{606}{857} \ldots$ bei welchen allen, wenn bei jedem der Zähler a und den Nenner b heißt, immer $2a^2-b^2=23=d$ ist.

Setzt man hierauf 2) $a=b-1$, so ist $2a^2-b^2=b^2-4b+2=d$, also $b=+2+\sqrt{(d+2)}=t+2$, und $a=t+1$. Folglich wenn, wie im gegenwärtigen Beispiel, $d=23$, also $t=5$ ist, so ist

$$a=6 \text{ und } b=7. \text{ Daher } \frac{a}{b}=\frac{6}{7}.$$

Daraus läßt sich nun für $d=23$ die zweite Reihe mittelst der erwähnten Formel darstellen, diese ist: $\frac{6}{7}, \frac{32}{45}, \frac{186}{263}, \frac{1084}{1533} \ldots \infty$ wobei auch immer

$2a^2 - b^2 = 23$ ist. Verbindet man die beiden Reihen, so erhält man vollständig:

$$\frac{4}{3},\ \frac{6}{7},\ \frac{18}{25},\ \frac{32}{45},\ \frac{104}{147},\ \frac{186}{263},\ \frac{606}{857},\ \frac{1084}{1533} \ldots \infty$$

$$\frac{a}{b},\ \frac{a'}{b},\ \frac{J}{K},\ \frac{P}{R},\ \frac{\iota}{\varkappa},\ \frac{\pi}{\varrho},\ \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{K}},\ \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{R}} \ldots \infty$$

wobei $2\mathfrak{P}^2 - \mathfrak{R}^2 = 2\mathfrak{J}^2 - \mathfrak{K}^2 = 2\pi^2 - \varrho^2 = 2\iota^2 - \varkappa^2$ $= 2P^2 - R^2 = 2J^2 - K^2 = 2a'^2 - b'^2 = 2a^2 - b^2 =$ der gegebenen ganzen Zahl d ist.

Endlich ist in jeder einzelnen Reihe die Summe des Zählers und Nenners eines Gliedes, der Differenz des Zählers und Nenners im nächstfolgenden Glied gleich. Nemlich da $4a + 3b - (3a + 2b) = a + b$ ist, so muß $a + b = K - J$, (nemlich $4 + 3 = 25 - 18$), ferner $K + J = \varkappa - \iota$ (nemlich $25 + 18 = 147 - 104$) eben so $\varkappa + \iota = \mathfrak{K} - \mathfrak{J}$ u. s. w. seyn. Ingleichen in der zweiten Reihe, $a' + b'$ $= R - P$ $(6 + 7 = 45 - 32)$ ferner $R + P = \varrho - \pi$ $(45 + 32 = 263 - 186)$ und so fort in das Unendliche.

Verzeichniß

der

von Jubilate-Messe 1825 — 1826 im Verlage

der

Riegel und Wießnerschen Buchhandlung

in Nürnberg

erschienenen Werke.

Beck, Dr. J. H., über den ursprünglichen Hirnmangel und die Pathologie u. Therapie des Gehirnblutflusses. gr. 8. 1826. 1 Rthlr. oder 1 fl. 36 kr.

Boeckh, Dr. C. F., zwei Predigten bei dem Wechsel seiner Amtsstellen. gr. 8. 1826. geh. 5 gr. oder 18 kr.

*Brandt, C. P. H., homiletisch-liturgisches Correspondenz-Blatt. In Verbindung mit mehreren evangelischen Geistlichen herausgegeben. gr. 4. 1825. 1 Rthlr. oder 1 fl. 36 kr.

— — Jahrgang 1826. 2 Rthlr. 16 gr. oder 4 fl.

Daumer, Prof. G. F., über den Gang und die Fortschritte unserer geistigen Entwicklung seit der Reformation und über ihren Standpunkt in der gegenwärtigen Zeit. Geschrieben zur Feyer des 23ten Maies, als des Stiftungstages des vor dreihundert Jahren gegründeten Gymnasiums zu Nürnberg. gr. 4. 1826. geh. 8 gr. oder 30 kr.

Daumer, G., Grundriſs der griechischen Formenlehre, in tabellarischen Uebersichten; zum Schulgebrauch. quer 4.

Flora, oder botanische Zeitung. 9ter Jahrgang. 8. 3 Rthlr. 16 gr. oder 6 fl.

Friedens-Worte an sämmtl. Schullehrer und Pfarrer im Königreich Baiern. Veranlaßt durch drei Druckschriften: 1) Allerlei für einfältige Schulmeister u. s. w. von C. W. G. 2) Allerlei für einfältige Pfaffen u. s. w. von C. W. und 3) Mittheilungen in Beziehung auf das Schulwesen von C. W. G. Von einem protestantischen

Pfarrer im Rezatkreise des Königreichs Baiern. 8. 1826. geh. 12 gr. oder 48 fr.

Friederich und Hesselbach, Beiträge zur Natur- und Heilkunde. Mit lithogr. Abbildungen 2s Heft. gr. 8.

Fronmüller, F., Sammlung militairischer Materialien. Zur Belehrung und nützlichen Unterhaltung in und außer den Regiments- Bataillons- und Eskadronsschulen für angehende Militairs, besonders aber für Unteroffiziere und Soldaten rc. 8. 1826. 20 gr. oder 1 fl. 24 fr.

Fuchs, K., die Sonntagsschule und die Sonntagsfeier. 8. 1826. geh. 8 gr. oder 30 fr.

Gerlach, J. P., Proceres, oder kurze Lebensbeschreibungen der vornehmsten Personen der Weltgeschichte. 2r Band. 2te Abtheilung. Mit Kupf. 8. 1 Rhtlr. oder 1 fl. 36 fr.

Haßler, J. F. L., Musterblätter altdeutscher Schriften. quer Folio 1825. 18 gr. oder 1 fl. 12 fr.

Heidenreich, F. W., die vier Grundpfeiler der Volksmedizin: das Blutlassen, Brechen, Abführen und die äußerlichen Mittel. gr. 8. 1826. geh. 10 gr. od. 40 fr.

Hensler, Dr. P., neue Lehren im Gebiete des physiologischen Anatomie und der Physiologie des Menschen. 2s Bändchen über die Bestimmung des Nervensystems. 8. 1826. 1 Thlr. oder 1 fl. 36 kr.

Hermann, Dr. F. B. W., über Anlage und Fleiß. Ein Vortrag bei der Feier der Preisevertheilung in den königlichen Studienanstalten zu Nürnberg am 2ten September 1825. gr. 8. geh. 3 gr. oder 12 fr.

— — Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Zum Gebrauch in Schulen und beim Selbstunterricht. gr. 8. 2 Rthlr. oder 3 fl.

— — über polytechnische Institute im Allgemeinen und über die Erweiterung der technischen Schule zu Nürnberg insbesondere. Mit einem Anhange, die Einrichtung der polytechnischen Anstalten zu Prag, Wien und Berlin betreffend. gr. 8. 1826. 20 gr. oder 1 fl. 21 fr.

Jäck, J. H., Beschreibung des Wallfahrtsortes Vierzehn-Heiligen zu Frankenthal, und der damit verbunden gewesenen Cisterzienser-Abtei Langheim im Obermainkreise Mit Kupfern. 8.

Jubelfeyer, die dreihundertjährige, des nürnbergischen Gymnasiums am 23ten Mai 1826. Ein Beitrag zur Geschichte Nürnbergs. Enthaltend die Beschreibung der Festlichkeiten, dann die bei denselben gehaltenen und erschienen Reden und Gedichte. gr. 4. 21 gr. oder 1 fl. 24 fr.

Lampert, J. W. F., Tapho-liturgische Blätter in Reden, Entwürfen und Gebeten an Gräbern für häusliche und kirchliche Erbauung. gr. 8. 1826. 1 Rthlr. oder 1 fl. 36 kr.

Lang, C. H. de, Regesta sive rerum Boicarum autographa ad annum usque MCCC e regni scriniis fideliter in summa contracta juxtaque genuinam terrae stirpisque diversitatem in Bavarica, Alemanica et Franconica synchronistice disposita. Volumen III. 4. 1825. 4 Rthlr. oder 6 fl.

Lesebuch für Volksschulen. 1r Theil. 2te Aufl. 1823. roh 12 gr. oder 48 kr.
(In Parthien für Schulen gebunden für diesen Preiß.)

Lösch, J. Chr. C., die Musik und der Choral als ein vorzügliches Bildungsmittel unserer Zeit. Rede bei der vierten Jahresprüfung der Gesangschule in Nürnberg, den 1. Julius 1825. gr. 8. geh. 3 gr. oder 12 kr.

Michahelles, K. F., Ideen und Materialien zu Kanzelvorträgen und Reden über biblische Texte an Geburts- und Namensfesten des königl. Hauses. 8. 12 gr. oder 45 kr.

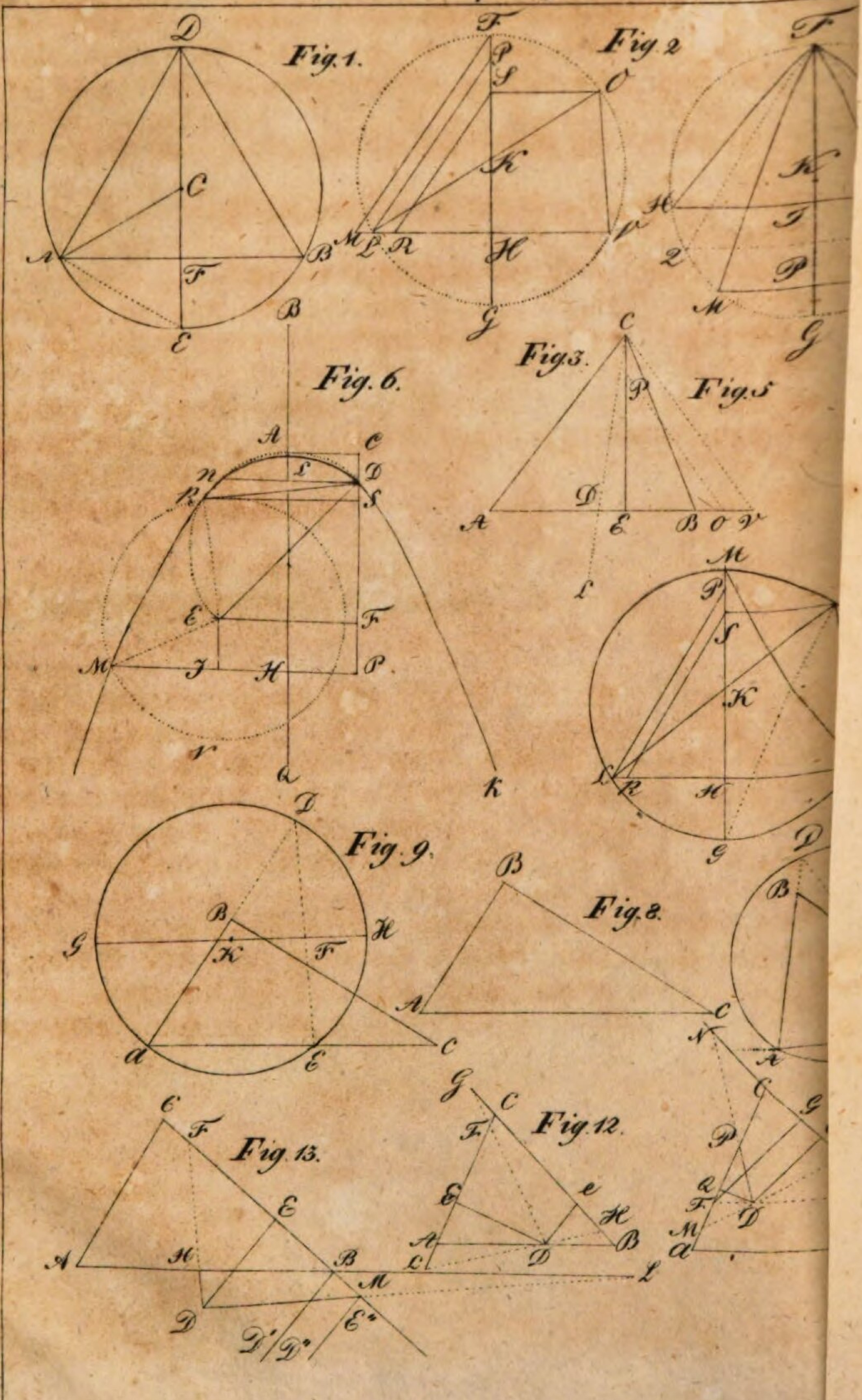
Mittheilungen, in Beziehung auf das Schulwesen von C. W. G. gr. 8. 1826. geh. 8 gr. oder 30 kr.

Müller, J. G. C., Dichtungen meist über Religions- und Naturgegenstände nebst einem Anhange von Charaden und Logogriphen. 8. 1826. geh. 21 gr. oder 1 fl. 21 kr.

— — welches sind die vorzüglichsten Gedanken, Gefühle und Entschließungen, womit der gebildete Christ seinen Geburtstag feiert? Beantwortet in einer Predigt am hohen Geburtsfest Ihro Majestät Karolina der Königin der Bayern. gr. 1825. geh. 3 gr. oder 12 kr.

Philippi, Dr. F., Vitae excellentium Romanorum. Biographien berühmter Römer. Ein Lehr- und Lesebuch zur Begründung des ersten Cursus in Erlernung der lateinischen Sprache nnd der Geschichte des alten Roms nach Aurelius Victor und Lomond gr. 8. 1826. 20 gr. oder 1 fl. 20 kr.

Zu Müllers Prüfung der Erklärung d.



L. Ammsdorffer in Steingrav.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Müller, Johann W.

Vollständige Auflösung der Aufgabe in einen Kreis ein Dreyeck mit einem gegebenen Winkel und Inhalt zu beschreiben Mit 1 Steindrucktaf

Nürnberg 1826

Math.p. 369 e
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082453-1